2 . 1 La description mathématique d'un corps physique en mouvement

Notre intuition sensible nous fait concevoir chaque corps A du monde physique, comme existant pendant un certain intervalle de temps (par exemple ouvert) $]T_1, T_2[$, et occupant, à chaque instant $T \in]T_1, T_2[$, une partie A_T de l'espace physique $\mathcal{E}_T$ ($A_T \subset \mathcal{E}_T$).

De plus, on considère généralement qu'il est possible de distinguer entre elles différentes parties du corps A, et de les reconnaître lors d'observations de ce corps faites à différentes époques T et $T' \in]T_1, T_2[$. Cette possibilité est plus ou moins évidente suivant la nature du corps. Considèrons un premier exemple, où le corps observé A est la Lune ; lors d'une première observation, un astronome n'a aucun mal à distinguer une partie du corps A, appelée par exemple cratère de Tycho, et à la reconnaître lors d'une autre observation faite des années plus tard. Considérons un second exemple, où le corps A est une masse d'eau en écoulement dans le lit d'une rivière. Un expérimentateur habile pourra, avec quelque difficulté, marquer une partie de cette masse d'eau, par exemple au moyen d'un colorant, et reconnaître la partie marquée à différents instants successifs.

Ceci étant admis on peut, par passage à la limite, considérer qu'il est possible de distinguer entre eux tous les points du corps A, et les reconnaître lors d'observations faites à différents instants. Ceci conduit au Principe :

Principe 3 Un corps physique, existant et en mouvement pendant un intervalle (par exemple ouvert) $]T_1, T_2[$ du temps $\mathcal{T}$, peut être schématisé par la donnée :

- d'un ensemble abstrait A (qui, en pratique, est une partie d'un espace affine euclidien de dimension 3, munie de la topologie induite).

- pour chaque $T \in]T_1, T_2[$, d'une bijection φ_T de A sur une partie A_T de l'espace $\mathcal{E}_T$.

Lorsque l'ensemble A comporte un seul élément M, on dit que le corps considéré est un point cinématique. Pour chaque instant $T \in]T_1, T_2[$, $M_T = \varphi_T(M) \in \mathcal{E}_T$ est appelé position du point cinématique M à l'instant T.

Lorsque A comporte plusieurs éléments, on dit que le corps considéré est constitué de plusieurs (voire une infinité) points cinématiques, et chaque point M de A est un des points cinématiques constituant le corps A.

On remarquera que l'ensemble abstrait A ne joue qu'un rôle conceptuel dans la description d'un corps physique en mouvement : les données les plus importantes sont celles, pour chaque $T \in \left]T_1, T_2\right[$, de la partie A_T de $\mathscr{E}_T$ et, pour chaque couple (T, T') d'éléments de $\left]T_1, T_2\right[$, de la bijection de A_T sur $A_{T'}$:

$$\psi_{T'T} = \varphi_{T'} \circ \varphi_T^{-1}$$

On remarque que les $\psi_{T'T}$ vérifient, si T, T', T'' sont trois éléments de $\left]T_1, T_2\right[$:

$$\psi_{T''T'} \circ \psi_{T'T} = \psi_{T''T} \quad ; \quad \psi_{TT} = Id_{A_T}$$

Il est facile de vérifier que la donnée des A_T et des $\psi_{T'T}$, satisfaisant ces propriétés, permet de construire l'ensemble abstrait A et les bijections φ_T de A sur chaque A_T (par exemple en choisissant une valeur particulière T_0 de T, en identifiant A à A_{T_0} et φ_T à ψ_{TT_0}).

Supposons choisi un référentiel admissible $\mathcal{R}$, de domaine de temps $\left]T_1, T_2\right[$. L'espace - temps rapporté à ce référentiel, est alors un produit cartésien $\left]T_1, T_2\right[\times \mathscr{E}$, où $\mathscr{E}$ est un espace affine euclidien de dimension 3. Dans ce référentiel, le mouvement d'un point cinématique M (qui peut être considéré comme constituant à lui seul un corps physique, ou comme étant un des points cinématiques d'un corps physique A), est décrit par la donnée, pour chaque $T \in \left]T_1, T_2\right[$, de sa <u>position</u> $M_T \in \mathscr{E}$. Autrement dit ce mouvement est décrit par une application, désignée aussi par M :

$$M : T \to M_T = M(T) \text{ , de } \left]T_1, T_2\right[\text{ dans } \mathscr{E}$$

<u>Remarque</u> L'expérience montre que l'application $T \to M_T$ qui décrit, dans un référentiel admissible $\mathcal{R}$, le mouvement d'un point cinématique, est <u>toujours continue</u>. Dans la plupart des problèmes courants de Mécanique, cette application est même de classe C^1 et C^2 par morceaux (voir définition en fin du paragraphe 1.4), ou même de classe C^2. Dans certains problèmes (notamment ceux faisant intervenir des chocs), l'application $T \to M_T$ est seulement de classe C^1 par morceaux. Dans la suite, on supposera (sauf mention explicite du contraire) les mouvements considérés décrits par des applications de classe C^2. On remarquera que si cette propriété est vraie dans un certain référentiel admissible, elle est vraie dans tout autre référentiel admissible si, comme cela a été convenu au chapitre 1, on considère comme admissibles les changements de repère de classe C^2.

2 . 2 Vitesse et accélération d'un point cinématique

Considérons un point cinématique M , dont le mouvement, dans un référentiel $\mathcal{R}$, est représenté par l'application désignée (avec un léger abus de notation) par M :

$$M : T \to M_T = M(T)$$

de $]\, T_1 , T_2 \,[$ dans $\mathcal{E}$.

Définitions 1. On appelle vitesse du point cinématique M , à l'instant $T \in]\, T_1 , T_2 \,[$, relativement au référentiel $\mathcal{R}$, la dérivée au point T de l'application $T \to M(T)$ de $]\, T_1 , T_2 \,[$ dans $\mathcal{E}$.

2. On appelle accélération du point cinématique M , à l'instant $T \in]\, T_1 , T_2 \,[$, relativement au référentiel $\mathcal{R}$, la dérivée seconde au point T de l'application $T \to M(T)$ de $]\, T_1 , T_2 \,[$ dans $\mathcal{E}$.

Remarques 1. La vitesse (resp. l'accélération) du point cinématique M , relativement au référentiel $\mathcal{R}$, existe en tout instant T où l'application $T \to M(T)$ est dérivable (resp. deux fois dérivable). Si cette application est de classe C^2 , vitesse et accélération existent en tout instant T de $]\, T_1 , T_2 \,[$, et sont des fonctions continues de T .

2. On rappelle (voir Annexe au présent chapitre), que la dérivée de $M : T \to M(T)$ au point T , est un élément de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\vec{\mathcal{T}} , \vec{\mathcal{E}})$ des applications linéaires de l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{T}}$ (associé à l'espace affine $\mathcal{T}$) dans l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{E}}$ (associé à $\mathcal{E}$). De même, la dérivée seconde de cette application au point T est un élément de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\vec{\mathcal{T}} , \mathcal{L}(\vec{\mathcal{T}} , \vec{\mathcal{E}}))$ des applications linéaires de $\vec{\mathcal{T}}$ dans $\mathcal{L}(\vec{\mathcal{T}} , \vec{\mathcal{E}})$.

Les définitions ci-dessus ont le mérite d'être intrinsèques : vitesse et accélération d'un point cinématique dépendent du choix d'un référentiel, mais non du choix d'un repère de l'espace - temps. Elles sont aussi indépendantes du choix d'une unité de temps. Toutefois, il est commode de représenter la vitesse et l'accélération d'un point cinématique, à l'instant T , par des vecteurs éléments de l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{E}}$ (associé à l'espace affine $\mathcal{E}$), qu'on considèrera comme attachés au point M (T) représentant la position du point cinématique à cet instant. On évite ainsi d'avoir à considérer d'autres espaces vectoriels $\mathcal{L}(\vec{\mathcal{T}} , \vec{\mathcal{E}})$ et $\mathcal{L}(\vec{\mathcal{T}} , \mathcal{L}(\vec{\mathcal{T}} , \vec{\mathcal{E}}))$. Mais une telle représentation de la vitesse et de l'accélération nécessite le choix d'une unité de temps, c'est à dire d'un vecteur $\vec{e}_0$ de $\vec{\mathcal{T}}$, considéré comme unitaire.

Supposons donc choisie une unité de temps $\vec{e}_0 \in \vec{\mathcal{T}}$, ainsi qu'une origine des temps $O_{\mathcal{T}} \in \mathcal{T}$. A chaque instant $T \in \,]\, T_1 , T_2 \,[$ correspond alors un <u>nombre réel</u> t, date de T relativement au repère $(O_{\mathcal{T}} , \vec{e}_0)$ de $\mathcal{T}$. t variera dans l'intervalle $]\, t_1 , t_2 \,[$ de $\mathbb{R}$ (t_1 et t_2 désignant les dates des instants T_1 et T_2). Considérons alors un point cinématique dont le mouvement, relativement au référentiel $\mathcal{R}$, est représenté par l'application $T \to M(T)$ de $]\, T_1 , T_2 \,[$ dans $\mathcal{E}$. En composant cette application avec celle, $t \to T$, qui à une date $t \in \,]\, t_1 , t_2 \,[$ associe l'instant correspondant $T \in \,]\, T_1 , T_2 \,[$, on peut définir une application désignée, par abus d'écriture, pour ne pas alourdir les notations, par :

$$t \to M(t) \quad , \quad \text{de }]\, t_1 , t_2 \,[\text{ dans } \mathcal{E}$$

que l'on utilisera désormais pour représenter le mouvement du point M. Cette application étant, maintenant, une fonction d'une <u>variable réelle</u> t, à valeurs dans un espace affine $\mathcal{E}$, on sait (voir Annexe), que ses dérivées première et seconde en un point $t \in \,]\, t_1 , t_2 \,[$ (et d'ailleurs de tous les ordres), lorsqu'elles existent, peuvent être considérés comme des éléments de l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{E}}$ associé à $\mathcal{E}$. De plus, ces dérivées dépendent du choix de $\vec{e}_0$, mais non de celui de l'origine des temps $O_{\mathcal{T}}$ (car modifier ce choix ne fait que modifier la définition des dates t par addition d'une constante). On peut donc définir :

<u>Définitions</u> On appelle <u>vecteur vitesse</u> (resp. <u>vecteur accélération</u>) du point cinématique M, à la date $t \in \,]\, t_1 , t_2 \,[$ (le temps étant rapporté au repère affine $(O_{\mathcal{T}} , \vec{e}_0)$), relativement au référentiel $\mathcal{R}$, la dérivée (respectivement la dérivée seconde) au point t de l'application $t \to M(t)$ (qui, à une date t, associe la position du point à cette date) de $]\, t_1 , t_2 \,[$ dans $\mathcal{E}$. Ce sont des vecteurs, éléments de $\vec{\mathcal{E}}$ (espace vectoriel associé à $\mathcal{E}$). Leur définition dépend des choix du référentiel $\mathcal{R}$ et de l'unité de temps $\vec{e}_0$, mais non du choix de l'origine des temps $O_{\mathcal{T}}$.

<u>Remarques</u> 1. On notera le vecteur vitesse de M à l'instant t :

$$\frac{\overrightarrow{d\,M(t)}}{dt} \quad , \quad \text{ou} \quad \vec{\dot{M}}(t)$$

et le vecteur accélération de M à l'instant t :

$$\frac{\overrightarrow{d^2 M(t)}}{dt^2} \quad , \quad \text{ou} \quad \vec{\ddot{M}}(t)$$

2. Soient $\vec{V}$ et $\vec{\Gamma}$, éléments de $\mathcal{E}$, les vecteurs vitesse et accélération d'un point cinématique M, à la date t, relativement au référentiel $\mathcal{R}$, lorsque le vecteur unitaire de temps choisi est $\vec{e}_0$. Si, toutes choses restant inchangées par ailleurs, on modifie le choix de l'unité de temps le nouveau vecteur unitaire du temps étant $\vec{e}_0' = \lambda \vec{e}_0$ $(\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0)$, alors les vecteurs vitesse et accélération de M deviennent :

$$\vec{V}' = \lambda \vec{V} \qquad \vec{\Gamma}' = \lambda^2 \vec{V}$$

2 . 3 Etude du mouvement d'un point cinématique. Exemples.

Soit un point cinématique M dont le mouvement, relativement à un référentiel $\mathcal{R}$, est représenté par une application $T \to M(T)$ de l'intervalle $]T_1, T_2[\subset \mathcal{T}$, dans l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$.

Choisissons un repère $\hat{\mathcal{R}}$ de l'espace - temps (ayant $\mathcal{R}$ pour référentiel associé) en prenant une origine $O_{\mathcal{T}}$ de $\mathcal{T}$ (déjà muni par convention du vecteur unitaire $\vec{e}_0$) et un repère affine $(O_{\mathcal{E}}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de $\mathcal{E}$. Le mouvement de est alors décrit par l'application $t \to M(t)$ (où t désigne la date de l'instant T). On écrira :

$$(1) \quad \begin{cases} M(t) = O_{\mathcal{E}} + x_1(t)\,\vec{e}_1 + x_2(t)\,\vec{e}_2 + x_3(t)\,\vec{e}_3 \quad \text{, ou :} \\ \overrightarrow{O_{\mathcal{E}} M(t)} = x_1(t)\,\vec{e}_1 + x_2(t)\,\vec{e}_2 + x_3(t)\,\vec{e}_3 \end{cases}$$

On voit donc que le mouvement est décrit par les trois fonctions réelles $x_i(t)$ $(1 \leq i \leq 3)$ de la variable réelle t, qui sont les valeurs à l'instant de date t des composantes de $\overrightarrow{O_{\mathcal{E}} M(t)}$. Si ces fonctions sont dérivables (resp. deux fois dérivables) au point $t \in]t_1, t_2[$, on peut définir le vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ (resp. le vecteur accélération $\vec{\Gamma}(t)$) :

$$(2) \qquad \vec{V}(t) = \frac{d\,\overrightarrow{M(t)}}{d\,t} = \frac{d\,x_1(t)}{d\,t}\,\vec{e}_1 + \frac{d\,x_2(t)}{d\,t}\,\vec{e}_2 + \frac{d\,x_3(t)}{d\,t}\,\vec{e}_3$$

$$(3) \qquad \vec{\Gamma}(t) = \frac{d^2\,\overrightarrow{M(t)}}{d\,t^2} = \frac{d^2 x_1(t)}{d\,t^2}\,\vec{e}_1 + \frac{d^2 x_2(t)}{d\,t^2}\,\vec{e}_2 + \frac{d^2 x_3(t)}{d\,t^2}\,\vec{e}_3$$

Signalons que ces formules restent vraies lorsque la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de $\vec{\mathcal{E}}$ n'est pas nécessairement orthonormée.

Dans de nombreux exemples pratiques, la position $M(t)$ du point cinématique M, est déterminée par la donnée :

- de cette position $M(q_1, \dots q_n)$ comme une fonction d'un certain nombre de paramètres réels $q_1, \dots q_n$, variant chacun dans un certain intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ ($(q_1, \dots q_n)$ varie donc dans un ouvert W de $\mathbb{R}^n$, produit d'intervalles ouverts).

- de la valeur $q_1(t), q_2(t), \dots q_n(t)$ de ces paramètres, en fonction de la date t.

Grâce à la propriété de dérivation des applications composées, il est facile de vérifier que si les applications $t \to q_i(t)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont dérivables en un point t de $]t_1, t_2[$, et si l'application $(q_1, \dots q_n) \to M(q_1, \dots q_n)$ est dérivable au point $(q_1(t), \dots q_n(t))$ de $\mathbb{R}^n$ (voir définition en Annexe), alors le vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ est donné par :

$$(4) \quad \vec{V}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\, q_i(t)}{dt} \, \frac{\partial \vec{M}\,(q_1(t), \dots q_n(t))}{\partial\, q_i}$$

On rappelle que le vecteur dérivée partielle $\frac{\partial \vec{M}\,(q_1, \dots q_n)}{\partial\, q_i}$ est (pour chaque i, $1 \leqslant i \leqslant n$) :

$$(5) \quad \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i}(q_1, \dots q_n) = \frac{\partial\, x_1(q_1 \dots q_n)}{\partial\, q_i}\vec{e}_1 + \frac{\partial\, x_2(q_1 \dots q_n)}{\partial\, q_i}\vec{e}_2 + \frac{\partial x_3(q_1 \dots q_n)}{\partial\, q_i}\vec{e}_3$$

En dérivant une seconde fois l'expression (4), on voit de même que si les applications $t \to q_i(t)$ et $(q_1, \dots q_n) \mapsto M(q_1, \dots q_n)$ sont dérivables deux fois, respectivement aux points $t \in]t_1, t_2[$ et $(q_1(t), \dots q_n(t)) \in \mathbb{R}^n$, alors le vecteur accélération $\vec{\Gamma}(t)$ est donné par :

$$(6) \quad \vec{\Gamma}(t) = \frac{d\,\vec{V}(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d^2 q_i(t)}{dt^2} \, \frac{\partial \vec{M}}{\partial\, q_i}\,(q_1(t), \dots q_n(t)) +$$
$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{d\, q_i(t)}{d\,t} \, \frac{d\, q_j(t)}{d\,t} \, \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial q_i\, \partial q_j}\,(q_1(t), \dots q_n(t))$$

<u>Remarque Formule de Lagrange</u> On peut considérer la formule (4) comme exprimant $\vec{V}(t)$ en fonction de $2n$ paramètres réels $q_1, \dots q_n, \dot{q}_1, \dots \dot{q}_n$, eux-mêmes fonctions de t, les n derniers $\dot{q}_1, \dots \dot{q}_n$ prenant à la date t les valeurs $\dot{q}_i(t) = \frac{d\, q_i(t)}{dt}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

On peut alors écrire :

$$(7) \quad \boxed{\vec{V}(q_1, \dots q_n, \dot{q}_1, \dots \dot{q}_n) = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i}(q_1, \dots q_n)}$$

Donc si, pour le calcul des dérivées partielles de $\vec{V}$, on considère les $2n$ paramètres réels $q_1, \dots q_n, \dot{q}_1, \dots \dot{q}_n$ comme indépendants, on peut écrire, en supposant la fonction $(q_1, \dots q_n) \to M(q_1, \dots q_n)$ deux fois dérivable :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial \dot{q}_i}(q_1, \dots q_n, \dot{q}_1, \dots \dot{q}_n) = \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i}(q_1, \dots q_n)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial q_j}(q_1, \dots q_n, \dot{q}_1, \dots \dot{q}_n) = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial q_i \, \partial q_j}(q_1, \dots q_n)$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_j}(q_1(t), \dots q_n(t))\right]$$

Dans cette dernière expression, le symbole $\frac{d}{dt}$ précédant la fonction $\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i}$ $(q_1(t), \dots q_n(t))$ désigne ce qu'on appelle parfois dérivée totale par rapport à t, c'est à dire la dérivée de la fonction composée de : $t \to (q_1(t), \dots q_n(t))$, et de $(q_1, \dots q_n) \to \frac{\partial M}{\partial q_i}(q_1, \dots q_n)$. Cette convention sera systématiquement utilisée dans la suite.

On peut alors mettre sous une forme remarquable le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{\Gamma}(t)$ et $\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i}(q_1(t), \dots q_n(t))$ (pour chaque i, $1 \leqslant i \leqslant n$).

En convenant d'écrire, pour alléger, q pour $(q_1, \dots q_n)$ et $\dot{q}$ pour $(\dot{q}_1, \dots \dot{q}_n)$, on a :

$$\vec{\Gamma}(t) \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i}(q(t)) = \frac{d}{dt}\left[\vec{V}(q(t), \dot{q}(t))\right] \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i}(q(t))$$

En utilisant la formule de dérivation d'un produit scalaire, et en utilisant les expressions ci-dessus de $\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i}$ et de $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i}\right)$:

$$\vec{\Gamma}(t) \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i}(q(t)) = \frac{d}{dt}\left[\vec{V}(q(t), \dot{q}(t)) \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial \dot{q}_i}(q(t), \dot{q}(t))\right]$$

$$- \vec{V}(q(t), \dot{q}(t)) \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial q_i}(q(t), \dot{q}(t))$$

En remarquant que

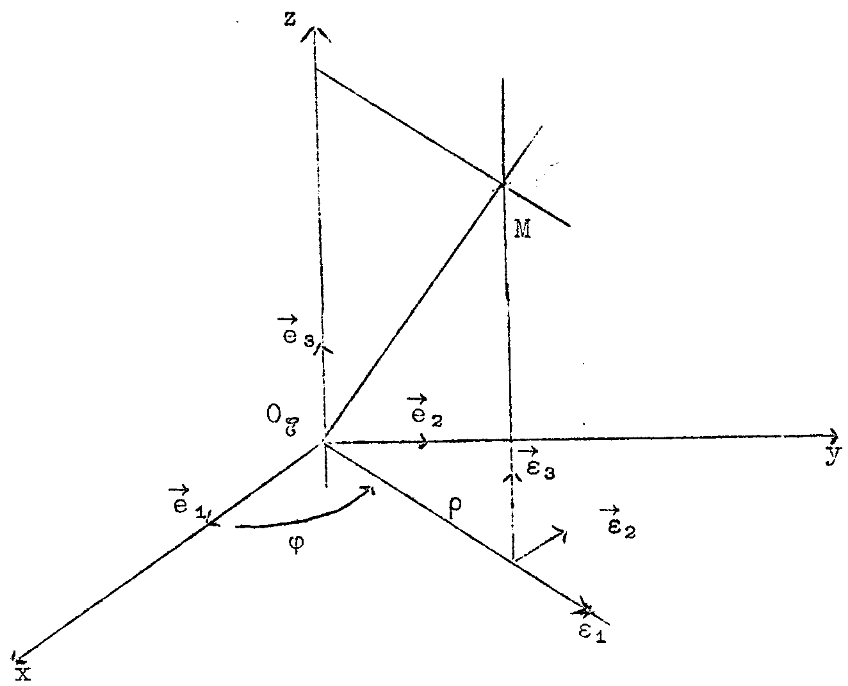
$$\vec{V}\ (q(t),\ \dot{q}(t))\ .\ \frac{\partial \vec{V}}{\partial \dot{q}_i}\ (q(t),\ \dot{q}(t)) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\ (\frac{1}{2}\ V^2(q(t),\ \dot{q}(t))$$

$$\vec{V}\ (q(t),\ \dot{q}(t))\ .\ \frac{\partial \vec{V}}{\partial q_i}\ (q(t),\ \dot{q}(t)) = \frac{\partial}{\partial q_i}\ (\frac{1}{2}\ V^2(q(t),\ \dot{q}(t))$$

($V^2 = \vec{V}\ .\ \vec{V}$ désignant le carré du module de $\vec{V}$), on obtient la formule de Lagrange :

$$(8)\quad \boxed{2\vec{\Gamma}(t)\ .\ \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i}\ (q(t) = \frac{d}{dt}\ \left[\frac{\partial}{\partial q_i}\ (V^2(q(t),\ \dot{q}(t))\right] - \frac{\partial}{\partial q_i}\ (V^2(q(t),\ \dot{q}(t)))}$$

Exemple 1 vitesse et accélération en coordonnées cylindriques



Les paramètres q_i , ici au nombre de 3, sont les coordonnées semi polaires (ρ, φ, z) (voir figure). Outre la base ($\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$) de $\vec{\mathscr{E}}$, on utilise la base orthonormée ($\vec{\varepsilon}_1$, $\vec{\varepsilon}_2$, $\vec{\varepsilon}_3$) où $\vec{\varepsilon}_1$ est parallèle à la projection de $\vec{OM}$ sur le plan déterminé par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, et de même sens, $\vec{\varepsilon}_3 = \vec{e}_3$, et $\vec{\varepsilon}_2$ normal à $\vec{\varepsilon}_1$ et $\vec{\varepsilon}_3$, les deux bases ($\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$) et ($\vec{\varepsilon}_1$, $\vec{\varepsilon}_2$, $\vec{\varepsilon}_3$) étant de même sens. On a :

$$\overrightarrow{O_{\mathscr{E}} M} = \rho\ \vec{\varepsilon}_1 + z\ \vec{\varepsilon}_3$$

Pour calculer la vitesse et l'accélération, on considère ρ, φ et z comme des fonctions données, 2 fois dérivables, de la variable t. On doit aussi tenir compte du fait que, alors que $\vec{\varepsilon}_3$ est constant, $\vec{\varepsilon}_1$ et $\vec{\varepsilon}_2$ sont fonction de φ, puisque :

$$(9)\quad \begin{cases} \vec{\varepsilon}_1 = \cos\varphi\ \vec{e}_1 + \sin\varphi\ \vec{e}_2 \\ \vec{\varepsilon}_2 = -\sin\varphi\ \vec{e}_1 + \cos\varphi\ \vec{e}_2 \end{cases}$$

d'où on déduit

$$\frac{\partial \vec{\varepsilon}_1}{\partial \varphi} = \vec{\varepsilon}_2 \quad ; \quad \frac{\partial \vec{\varepsilon}_1}{\partial z} = \frac{\partial \vec{\varepsilon}_1}{\partial \rho} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{\varepsilon}_2}{\partial \varphi} = - \vec{\varepsilon}_1 \quad ; \quad \frac{\partial \vec{\varepsilon}_2}{\partial z} = \frac{\partial \vec{\varepsilon}_2}{\partial \rho} = 0$$

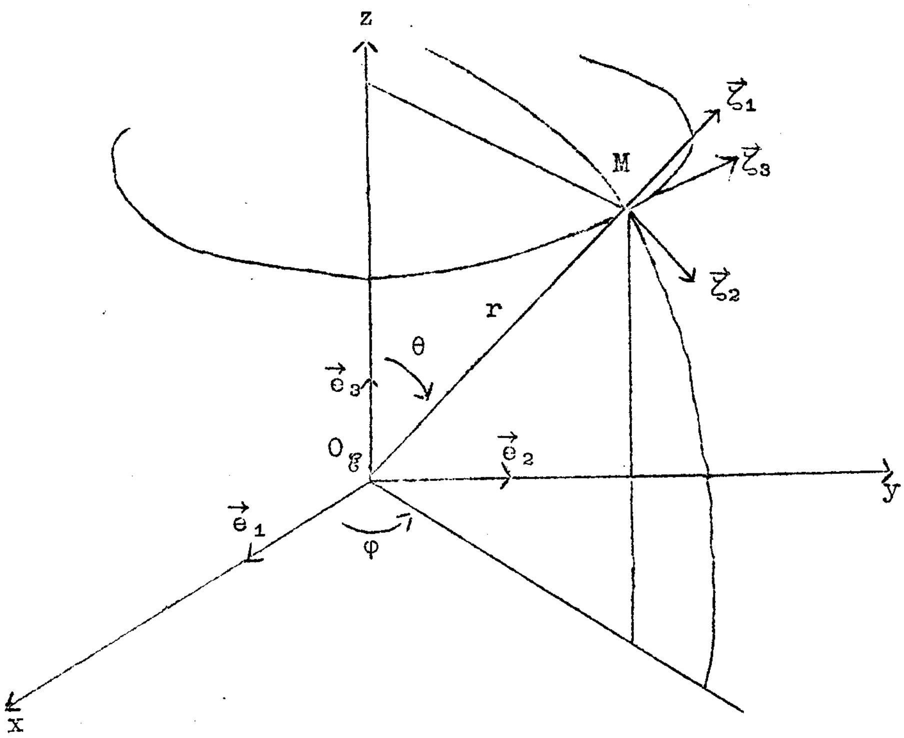
On obtient alors sans difficulté :

$$(10) \quad \vec{V} = \frac{d\vec{M}}{d\,t} = \frac{d\,\rho}{d\,t}\vec{\varepsilon}_1 + \rho\frac{d\,\varphi}{d\,t}\vec{\varepsilon}_2 + \frac{d\,z}{d\,t}\vec{\varepsilon}_3$$

$$(11) \quad \vec{\Gamma} = \frac{d^2\vec{M}}{d\,t^2} = \left[\frac{d^2\rho}{d\,t^2} - \rho\left(\frac{d\,\varphi}{d\,t}\right)^2\right]\vec{\varepsilon}_1 + \left[\rho\frac{d^2\varphi}{d\,t^2} + 2\,\frac{d\,\rho}{d\,t}\frac{d\,\varphi}{d\,t}\right]\vec{\varepsilon}_2 + \frac{d^2 z}{d\,t^2}\vec{\varepsilon}_3$$

Bien entendu, en utilisant (9) , il est facile d'en déduire les composantes de $\vec{V}$ et $\vec{\Gamma}$ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Exemple 2 Vitesse et accélération en coordonnées sphériques



Les paramètres q_i sont ici les coordonnées sphériques r (distance à l'origine) θ (colatitude) et φ (longitude). (Voir Figure). Outre la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de $\vec{\mathscr{E}}$, on utilise la base orthonormée $(\vec{\zeta}_1, \vec{\zeta}_2, \vec{\zeta}_3)$ où $\vec{\zeta}_1$ est parallèle à $\vec{OM}$ et de même sens, $\vec{\zeta}_2$ tangent au cercle méridien au point M et dirigé vers le pôle sud, et $\vec{\zeta}_3$ tangent au cercle parallèle au point M. On a :

$$\overrightarrow{O_{\mathscr{E}} M} = r\,\vec{\zeta}_1$$

Les vecteurs $\vec{\zeta}_1$, $\vec{\zeta}_2$, $\vec{\zeta}_3$ s'expriment par :

$$(12)\quad \begin{cases} \vec{\zeta}_1 = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{e}_2 + \cos\theta\,\vec{e}_3 \\ \vec{\zeta}_2 = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{e}_2 - \sin\theta\,\vec{e}_3 \\ \vec{\zeta}_3 = -\sin\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\,\vec{e}_2 \end{cases}$$

d'où les dérivées partielles de $\vec{\zeta}_1$:

$$\frac{\partial \vec{\zeta}_1}{\partial r} = 0 \quad ; \quad \frac{d\vec{\zeta}_1}{\partial\theta} = \vec{\zeta}_2 \quad ; \quad \frac{\partial \zeta_1}{\partial\varphi} = \sin\theta\,\vec{\zeta}_3$$

On en déduit l'expression du vecteur vitesse :

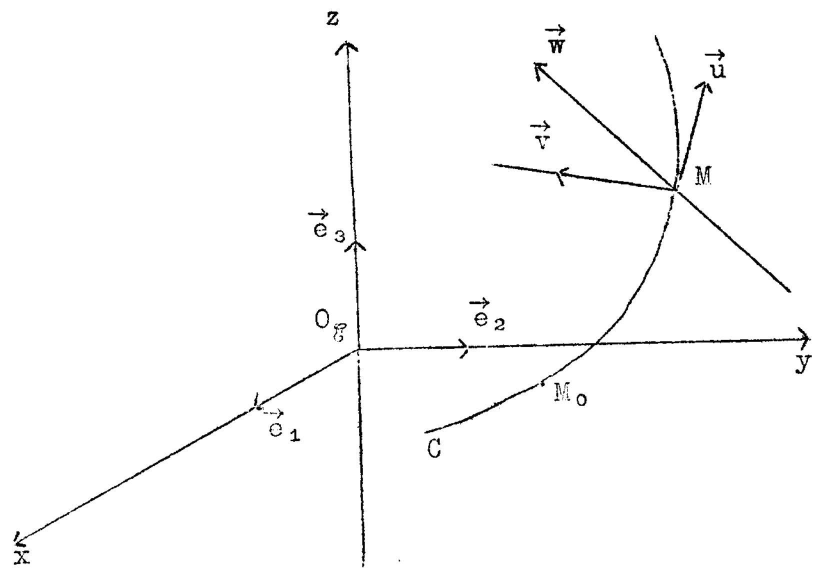
$$(13)\quad \vec{V} = \frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{\zeta}_1 + r\left(\frac{dr}{dt}\frac{\partial\vec{\zeta}_1}{\partial r} + \frac{d\theta}{dt}\frac{\partial\vec{\zeta}_1}{\partial\theta} + \frac{d\varphi}{dt}\frac{\partial\vec{\zeta}_1}{\partial\varphi}\right)$$

$$= \frac{dr}{dt}\vec{\zeta}_1 + r\frac{d\theta}{dt}\vec{\zeta}_2 + r\sin\theta\,\frac{d\varphi}{dt}\vec{\zeta}_3$$

Le calcul du vecteur accélération, qui se fait de la même manière (et nécessite le calcul des dérivées partielles de $\vec{\zeta}_2$ et $\vec{\zeta}_3$) est laissé en exercice. On pourra également utiliser la formule de Lagrange (8).

Exemple 3 Point mobile sur une courbe

Il arrive dans les applications qu'on sache à l'avance que le mouvement du point cinématique étudié se fait sur une courbe C, déterminée, dans le repère choisi, par la donnée des composantes de $\vec{OM}$ en fonction d'un paramètre réel q. Il est souvent commode de prendre pour paramètre q, l'abscisse curviligne s (mesurée sur la courbe C à partir d'une origine M_0, et après le choix d'un sens positif sur C).



On supposera la fonction $s \to M(s)$ de classe C^2. On pose :

$$\frac{d\vec{M}(s)}{d\,s} = \vec{u}(s)$$

$$\frac{d^2\vec{M}(s)}{d\,s^2} = \frac{1}{R(s)}\,\vec{v}(s)$$

Le vecteur $\vec{u}(s)$ est tangent à la courbe C au point $M(s)$, et unitaire. Cela résulte de la définition même de l'abscisse curviligne. Si $\frac{d^2 M(s)}{d\,t^2} \neq 0$, on définit $R(s) > 0$ et $\vec{v}(s)$, de telle sorte que le vecteur $\vec{v}(s)$ soit unitaire. Ce vecteur est normal à $\vec{u}(s)$, comme on le voit en dérivant l'expression

$$\vec{u}(s) \cdot \vec{u}(s) = 1$$

$$\frac{d\,\vec{u}(s)}{d\,s} \cdot \vec{u}(s) = \frac{1}{R(s)}\,\vec{v}(s) \cdot \vec{u}(s) = 0$$

$R(s)$ est appelé rayon de courbure, et $\frac{1}{R(s)}$ courbure, de la courbe C au point $M(s)$. La droite passant par $M(s)$ et parallèle à $\vec{v}(s)$ est dite normale principale à la courbe C au point $M(s)$. On prend enfin le vecteur $\vec{w}(s)$ tel que $(\vec{u}(s), \vec{v}(s), \vec{w}(s))$ soit un repère orthonormé de $\vec{\mathcal{E}}$, de même sens que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. $(M(s), \vec{u}(s), \vec{v}(s), \vec{w}(s))$ est appelé repère de Frenet au point $M(s)$.

Lorsque $\frac{d^2\vec{M}(s)}{d\,s^2} = 0$, on convient que $\frac{1}{R(s)} = 0$ et on choisit $\vec{v}(s)$ unitaire normal à $\vec{u}(s)$, généralement par continuité (ce qui n'est pas toujours possible).

Le mouvement du point M étant défini par la donnée de son abscisse curviligne s en fonction de la date t, on obtient facilement les expressions des vecteurs vitesse et accélération, dans la <u>base de Frenet</u> :

$$\vec{V}(t) = \frac{d}{dt}\,\overrightarrow{M(s(t))} = \frac{d\,s(t)}{d\,t}\,\vec{u}(s) \qquad \text{, donc}$$

$$|\,\mathbf{v}(t)| = \left|\frac{d\,s(t)}{dt}\right|$$

$$\vec{\Gamma}(t) = \frac{d^2 s(t)}{d\,t^2}\,\vec{u}(s(t)) + \frac{V^2(t)}{R(s(t))}\,\vec{v}(s(t))$$

Remarque Lorsque la courbe C est plane on choisit généralement le repère de sorte qu'elle soit contenue dans le plan $(O_{\mathcal{E}}, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On n'impose plus dans ce cas à $\frac{1}{R(s)}$ d'être nécessairement ≥ 0 : on choisit le sens du vecteur $\vec{v}(s_0)$ en un point $M(s_0)$ de C et on détermine $\vec{v}(s)$ aux points voisins par continuité, $\frac{1}{R(s)}$ pouvant alors prendre des valeurs positives ou négatives.

2 . 4 Mouvement d'un milieu continu

Soit A un corps physique dont on étudie le mouvement pendant un intervalle de temps $]T_1, T_2[$, $\mathcal{R}$ un référentiel de l'espace - temps, de domaine de temps $]T_1, T_2[$. Pour tout instant $T \in]T_1, T_2[$, la position $A_T \subset \mathcal{E}_T$ du corps, peut être considérée comme une partie de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ (puisque le choix du référentiel $\mathcal{R}$ implique qu'on identifie tous les $\mathcal{E}_T$ à un même espace affine euclidien $\mathcal{E}$). La bijection $\varphi_T : A \to A_T$ qui, à tout point cinématique M du corps A fait correspondre sa position $M(T)$ à l'instant T, est donc à valeurs dans $\mathcal{E}$. On peut par conséquent définir une application φ de $]T_1, T_2[\times A$ dans $\mathcal{E}$, par :

$$\varphi(T, M) = \varphi_T(M) = M(T)$$

On connaît déjà certaines propriétés de cette application : pour tout $T \in]T_1, T_2[$ fixé, l'application partielle $M \to \varphi(T, M)$ est une bijection de A sur $A_T \subset \mathcal{E}$; d'autre part (paragraphe 2.2) pour tout $M \in A$ fixé, l'application $T \to \varphi(T, M)$ de $]T_1, T_2[$ dans $\mathcal{E}$, est continue, et même en général de classe C^2. Pour certains corps physiques particuliers, notamment les milieux continus, cette application possède des propriétés de régularité supplémentaires (dans la définition suivante A est considéré comme une partie d'un espace affine euclidien de dimension 3, munie de la topologie induite) :

Définition. On dit que le corps physique A est un milieu continu si l'application $\varphi :]T_1, T_2[\times A \to \mathcal{E}$, est continue (par rapport au couple de variables $(T, M) \in]T_1, T_2[\times A$).

De nombreux corps physiques rencontrés en pratique peuvent être considérés comme des milieux continus. Certains cas toutefois échappent à cette description, comme celui d'un jet de liquide qui se brise en gouttelettes isolées.

On suppose souvent l'application φ, non seulement continue, mais de classe C^2 (toujours par rapport au couple de variables (T, M). On peut alors définir diverses notions classiques de la cinématique des milieux continus, telles que celle de tenseur des vitesses de déformation, qui seront enseignéesdans les cours de Mécanique des milieux continus.

2 . 5 Mouvement d'un corps rigide

On conserve les hypothèses et notations du paragraphe précédent, l'application $\varphi :]T_1, T_2[\times A \to \mathcal{E}$ décrivant, relativement à un référentiel $\mathcal{R}$, le mouvement d'un milieu continu A.

Définition On dit que A est un corps rigide (ou un solide parfait) si, quels que soient les points cinématiques M_1 et M_2 de A, la distance de leurs positions $M_1(T)$ et $M_2(T)$ à tout instant $T \in]T_1, T_2[$, est indépendante de T.

On supposera dans la suite que le corps A comporte au moins trois points cinématiques non alignés M_0, M_1 et M_2. (Cela a un sens car si, à un instant T particulier, $M_0(T)$, $M_1(T)$ et $M_2(T)$ ne sont pas alignés, il en est de même à tout autre instant élément de $]T_1, T_2[$). La donnée, à un instant T, des positions $M_0(T)$, $M_1(T)$, $M_2(T)$ de ces trois points cinématiques, suffit pour déterminer la position à l'instant T de tout autre point cinématique du corps rigide. On peut en effet construire un repère unique d'origine $M_0(T)$, ayant pour deux premiers vecteurs de base $\overrightarrow{M_0(T)M_1(T)}$ et $\overrightarrow{M_0(T)M_2(T)}$, le troisième $\overrightarrow{M_0(T)M_3(T)}$ étant pris, par exemple, unitaire, normal aux deux premiers et de sens tel que la base de $\vec{\mathcal{E}}$ ainsi construite soit directe. La position de tout point cinématique M du corps A est alors définie par ses coordonnées dans ce repère. On voit que les coordonnées de la position $M(T)$ de tout point cinématique M du corps A, dans le repère ainsi construit, sont indépendantes de T. On dit que ce repère est lié au corps rigide A.

Il est alors possible de considérer, au moins conceptuellement, le corps rigide A comme s'étendant à l'infini dans toutes les directions, ce qui signifie que sa position A_T à chaque instant T, est en fait l'espace $\mathcal{E}$ tout entier. On peut en effet repérer, à chaque instant, la position d'un point de $\mathcal{E}$ relativement au repère lié au solide A, et étudier son mouvement comme si ce point faisait partie de A. On définit ainsi un point cinématique, dit cinématiquement lié à A. Ainsi, par exemple, l'extrémité M_3 du vecteur $\overrightarrow{M_0M_3}$ ci-dessus défini, est un point cinématique, cinématiquement lié au corps A.

En remplaçant, si nécessaire, les points cinématiques M_0, M_1, M_2, M_3 par d'autres points cinématiquement liés au corps A , qu'on désignera toujours par les mêmes lettres pour ne pas embrouiller inutilement les notations, on peut supposer qu'à chaque instant T , les vecteurs :

$$\vec{\varepsilon}_1 (T) = \overrightarrow{M_0 (T) M_1 (T)} \quad ; \quad \vec{\varepsilon}_2 (T) = \overrightarrow{M_0 (T) M_2 (T)} \quad ; \quad \vec{\varepsilon}_3 (T) = \overrightarrow{M_0 (T) M_3 (T)}$$

forment une base orthonormée de $\mathscr{E}$. On voit, par continuité, que les bases $(\vec{\varepsilon}_1 (T), \vec{\varepsilon}_2 (T), \vec{\varepsilon}_3 (T))$ correspondant à différentes valeurs de $T \in] T_1, T_2 [$, sont toutes de même sens, et on peut, par un choix convenable de points cinématiques définissant le repère, faire en sorte qu'elles soient de sens positif (en supposant $\mathscr{E}$ orienté).

D'autre part, soit $(O_{\mathscr{E}}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ un repère affine orthonormé fixe de $\mathscr{E}$, de sens positif (obtenu par exemple, mais pas obligatoirement, en choisissant un instant $T_0 \in] T_1, T_2 [$ et en prenant $O_{\mathscr{E}} = M_0 (T_0)$, $\vec{e}_1 = \vec{\varepsilon}_1 (T_0)$, $\vec{e}_2 = \vec{\varepsilon}_2 (T_0)$, $\vec{e}_3 = \vec{\varepsilon}_3 (T_0)$).

On a alors un repère affine orthonormé de sens positif fixe de $\mathscr{E}$, $(O_{\mathscr{E}}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et, pour tout instant $T \in] T_1, T_2 [$, un autre repère (dit lié au corps rigide en mouvement) $(M_0 (T), \vec{\varepsilon}_1 (T), \vec{\varepsilon}_2 (T), \vec{\varepsilon}_3 (T))$. Les positions relatives de ces deux repères sont décrites par les formules du paragraphe 1.4 :

$$(2.5.1) \quad \begin{cases} M_0 (T) = O_{\mathscr{E}} + A_1 (T) \vec{e}_1 + A_2 (T) \vec{e}_2 + A_3 (T) \vec{e}_3 \\ \\ \vec{\varepsilon}_i (T) = B_{1i} (T) \vec{e}_1 + B_{2i} (T) \vec{e}_2 + B_{3i} (T) \vec{e}_3 \qquad (1 \leq i \leq 3) \end{cases}$$

La donnée, en fonction de $T \in] T_1, T_2 [$, des trois composantes $A_i (T)$ $(1 \leq i \leq 3)$ du vecteur $\overrightarrow{O_{\mathscr{E}} M_0 (T)}$, et des coefficients de la matrice orthogonale $B (T) = (B_{ij} (T))$, détermine complètement la position du corps rigide. Soit par exemple un point cinématique M du corps rigide ayant, dans le repère lié au corps rigide, les coordonnées (a_1, a_2, a_3). Cela signifie que pour tout $T \in] T_1, T_2 [$, la position $M (T)$ de M est :

$$(2.5.2) \quad M (T) = M_0 (T) + a_1 \vec{\varepsilon}_1 (T) + a_2 \vec{\varepsilon}_2 (T) + a_3 \vec{\varepsilon}_3 (T)$$

Alors les coordonnées $(x_1 (T), x_2 (T), x_3 (T)$ de $M (T)$ dans le repère fixe $(O_{\mathscr{E}}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ sont :

$$(2.5.3) \quad x_i (T) = A_i (T) + B_{i1} (T) a_1 + B_{i2} (T) a_2 + B_{i3} (T) a_3 \qquad (1 \leq i \leq 3)$$

qu'on peut écrire sous forme matricielle :

$$(2.5.4) \quad x\ (T) = A\ (T) + B\ (T)\ a$$

où $x\ (T)$, $A\ (T)$ et a désignent les vecteurs colonnes :

$$(2.5.5) \quad x\,(T) = \begin{pmatrix} x_1\ (T) \\ x_2\ (T) \\ x_3\ (T) \end{pmatrix} \ ; \qquad A\ (T) = \begin{pmatrix} A_1\ (T) \\ A_2\ (T) \\ A_3\ (T) \end{pmatrix} \ ; \qquad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

et $B\ (T)$ la matrice 3×3 :

$$(2.5.6) \quad B\ (T) = (B_{ij}\ (T)) = \begin{pmatrix} B_{11}\ (T) & B_{12}\ (T) & B_{13}\ (T) \\ B_{21}\ (T) & B_{22}\ (T) & B_{23}\ (T) \\ B_{31}\ (T) & B_{32}\ (T) & B_{33}\ (T) \end{pmatrix}$$

<u>Remarque 1</u> Pour définir un mouvement d'un corps rigide, une fois choisi un référentiel $\mathcal{R}$ de l'espace - temps et un repère affine orthonormé $(O_{\mathcal{E}}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de $\mathcal{E}$, on peut d'après ce qui précède, se donner en fonction de $T \in\ ]\ T_1, T_2\ [$, les trois composantes $A_i\ (T)$ $(1 \leq i \leq 3)$ de $\overrightarrow{O_{\mathcal{E}} M_0}\ (T)$, et les neuf composantes $B_{ij}\ (T)$ de la matrice B . Mais alors que les trois $A_i\ (T)$ peuvent être choisis arbitrairement (sous la seule réserve d'être assez réguliers, par exemple de classe C^2), les $B_{ij}\ (T)$ ne peuvent pas être tous choisis indépendamment, car la matrice $B\ (T)$ doit être orthogonale et de déterminant $+ 1$. On verra plus loin qu'en fait les neuf $B_{ij}\ (T)$ dépendent de trois paramètres scalaires seulement.

<u>Remarque 2</u> On peut donner aux formules (2.5.3), qui expriment en fonction de T les coordonnées d'un point cinématiquement lié au corps rigide, une signification géométrique plus intrinsèque. Pour cela, désignons par :

- $\mathfrak{B}\,(T)$ l'application linéaire de $\vec{\mathcal{E}}$ (espace vectoriel associé à $\mathcal{E}$) dans lui-même, qui applique $\vec{e}_1$ sur $\vec{\varepsilon}_1$, $\vec{e}_2$ sur $\vec{\varepsilon}_2$ et $\vec{e}_3$ sur $\vec{\varepsilon}_3$, ce qui suffit à la définir ;

- $\vec{a}$ le vecteur, élément de $\vec{\mathcal{E}}$:

On remarque que l'application linéaire $\mathcal{B}(T)$ n'est pas quelconque, puisqu'elle transforme une base orthonormée positive en une autre base orthonormée positive. On dit que $\mathcal{B}(T)$ est une application linéaire orthogonale positive de l'espace vectoriel euclidien $\vec{\mathcal{E}}$ dans lui-même. Une telle application est nécessairement inversible, et s'exprime dans une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de $\vec{\mathcal{E}}$ par une matrice orthogonale $B(T)$ de déterminant $+1$.

On peut alors interpréter (2.5.2) comme exprimant :

$$\overrightarrow{M_0(T)\,M(T)} = a_1\,\overrightarrow{\varepsilon_1(T)} + a_2\,\overrightarrow{\varepsilon_2(T)} + a_3\,\overrightarrow{\varepsilon_3(T)}$$

$$= \mathcal{B}(T)\,(\vec{a})$$

d'autre part on a :

$$\overrightarrow{O_{\mathcal{E}}\,M(T)} = \overrightarrow{O_{\mathcal{E}}\,M_0(T)} + \overrightarrow{M_0(T)\,M(T)}$$

de sorte que la formule (2.5.3) exprime l'égalité vectorielle :

$$(2.5.8) \qquad \overrightarrow{O_{\mathcal{E}}\,M(T)} = \overrightarrow{O_{\mathcal{E}}\,M_0}(T) + \mathcal{B}(T)\,(\vec{a})$$

Le mouvement du corps rigide est donc défini par la donnée, en fonction de $T \in \,]T_1, T_2[$:

- d'un vecteur $\overrightarrow{O_{\mathcal{E}}\,M_0(T)}$ de $\vec{\mathcal{E}}$, ou (ce qui revient au même, mais à l'avantage de ne pas dépendre du choix de $O_{\mathcal{E}}$), d'un point $M_0(T)$ de l'espace affine $\mathcal{E}$.

- d'une application linéaire orthogonale positive $\mathcal{B}(T)$ de $\vec{\mathcal{E}}$ dans lui-même.

La position à l'instant T d'un point cinématiquement lié au corps mobile (défini par la donnée de $\vec{a}$) est alors donnée par (2.5.8).

Le vecteur $\vec{a}$ admet une interprétation simple lorsque le choix du repère affine orthonormé fixe $(O_{\mathcal{E}}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de $\mathcal{E}$ est fait en considérant un instant particulier $T_0 \in \,]T_1, T_2[$, et en prenant $O_{\mathcal{E}} = M_0(T_0)$, $\vec{e}_1 = \vec{\varepsilon}_1(T_0)$, $\vec{e}_2 = \vec{\varepsilon}_2(T_0)$, $\vec{e}_3 = \vec{\varepsilon}_3(T_0)$. Dans ce cas on a simplement (d'après 2.5.2 et 2.5.7) :

$$(2.5.9) \qquad \vec{a} = \overrightarrow{M_0(T_0)\,M(T_0)}$$

Définir un point cinématiquement lié au corps rigide par la donnée du vecteur $\vec{a}$ consiste donc à définir ce point cinématique par la donnée de sa position $M(T_0)$ à l'instant T_0.

La formule (2.5.8) exprime, dans ce cas, la transformation affine de $\mathcal{E}$ qui fait correspondre, à la position $M(T_0)$ occupée, à l'instant T_0, par un point cinématique du corps rigide, la position $M(T)$ de ce même point à l'instant T. On peut l'écrire :

$$(2.5.10) \qquad M(T) = M_0(T) + \mathcal{B}(T)\ (\overrightarrow{M_0(T_0)\, M(T_0)})$$

On remarquera que cette transformation affine est en fait une isométrie respectant l'orientation.

2 . 6 Le champ des vitesses d'un corps rigide

On conserve les hypothèses et les notations du paragraphe précédent. De plus, on choisit un repère affine $(O_{\mathcal{T}}, \vec{e}_0)$ du temps $\mathcal{T}$ ($\vec{e}_0$ étant d'ailleurs déjà donné, par convention). En considérant tout instant $T \in\,]T_1, T_2[$ comme fonction de sa date $t \in\,]t_1, t_2[$, on peut exprimer les quantités $A_i(T)$ et $B_{ij}(T)$ qui décrivent le mouvement du corps rigide, comme des fonctions de la variable réelle t, (qu'on désignera par les mêmes lettres pour ne pas alourdir les notations). L'expression (2.5.3) des coordonnées d'un point cinématiquement lié au corps rigide devient $(1 \leqslant i \leqslant 3)$:

$$(2.6.1) \qquad x_i(t) = A_i(t) + B_{i1}(t)\, a_1 + B_{i2}(t)\, a_2 + B_{i3}(t)\, a_3$$

ou, sous forme matricielle

$$(2.6.2) \qquad x(t) = A(t) + B(t)\, a$$

De même (2.5.8), qui exprime la même relation, sous une forme plus intrinsèque, devient :

$$(2.6.3) \qquad \overrightarrow{O_{\mathcal{E}} M}(t) = \overrightarrow{O_{\mathcal{E}} M_0}(t) + \mathcal{B}(t)\ (\vec{a})$$

En dérivant ces relations par rapport à t, on obtient l'expression du vecteur vitesse $\vec{V}_M(t)$ du point cinématique M, à la date t :

$$(2.6.4) \qquad v_i(t) = \frac{d\, A_i(t)}{d\, t} + \frac{d\, B_{i1}(t)}{d\, t}\, a_1 + \frac{d\, B_{i2}(t)}{d\, t}\, a_2 + \frac{d\, B_{i3}(t)}{d\, t}\, a_3$$

($v_i(t)$, $1 \leqslant i \leqslant 3$, désignent les composantes de $\vec{V}_M(t)$. Sous forme matricielle :

$$(2.6.5) \qquad V(t) = \frac{d\,A(t)}{d\,t} + B(t)\,a$$

ou encore, sous forme intrinsèque :

$$\overrightarrow{V_M}(t) = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{O_{\mathcal{E}}M}(t)) = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{O_{\mathcal{E}}M_0}(t)) + \frac{d\,\mathcal{B}(t)}{d\,t}(\vec{a})$$

En remarquant que $\frac{d}{dt}(\overrightarrow{O_{\mathcal{E}}M_0}(t))$ n'est autre que le vecteur vitesse $\vec{V}_{M_0}(t)$ du point cinématique M_0 :

$$(2.6.6) \qquad \overrightarrow{V_M}(t) = \overrightarrow{V_{M_0}}(t) + \frac{d\,\mathcal{B}(t)}{d\,t}(\vec{a})$$

A la date $t \in \,]t_1, t_2[$ fixée, on a donc pour chaque point cinématique M du corps rigide, un vecteur vitesse $\overrightarrow{V_M}(t)$. On peut considérer $\overrightarrow{V_M}(t)$ comme dépendant de la position $M(t)$ du point cinématique M , à la date t. On voit ainsi que l'ensemble des vecteurs vitesses de tous les points cinématiques du corps rigide, à la date t , est un <u>champ de vecteurs</u> défini sur l'espace affine $\mathcal{E}$ entier. On rappelle en effet la définition :

<u>Définition</u> Soit A une partie (en général ouverte) d'un espace affine $\mathcal{E}$. On appelle <u>champ de vecteurs</u> défini sur A une application $P \to \vec{V}(P)$ de A dans l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{E}}$ associé à $\mathcal{E}$. $\vec{V}(P)$ est appelé valeur du champ de vecteurs considéré, au point $P \in A$.

En fait, on a dans le cas présent un champ de vecteurs défini sur $\mathcal{E}$ entier, pour chaque $t \in \,]t_1, t_2[$, c'est à dire une application $(t, P) \to \vec{V}(t, P)$ de $]t_1, t_2[\times \mathcal{E}$ dans $\vec{\mathcal{E}}$. On dit dans ce cas qu'on a un champ de vecteurs <u>dépendant de t</u> . Afin de mieux mettre en évidence l'expression de ce champ, on doit exprimer le vecteur vitesse $\overrightarrow{V_M}(t)$ du point cinématique M à la date t non plus, comme dans (2.6.6) , en fonction du vecteur $\vec{a}$, mais en fonction de la position $M(t)$ de M à la date t . On écrira $\vec{V}(t, M(t))$ au lieu de $\overrightarrow{V_M}(t)$ pour bien faire ressortir qu'il s'agit de la valeur, à la date t et au point $M(t)$ de $\mathcal{E}$, d'un champ de vecteurs dépendant de t . Pour obtenir l'expression cherchée il suffit de remarquer qu'on a, d'après (2.6.3) :

$$\overrightarrow{M_0(t)\,M(t)} = \mathcal{B}(t)\,\vec{a}$$

d'où, puisque $\mathcal{B}(t)$ est une application linéaire inversible de $\vec{\mathcal{E}}$ dans lui-même :

$$\vec{a} = \mathcal{B}(t)^{-1} \left(\overrightarrow{M_0(t)\,M(t)}\right)$$

et en remplaçant $\vec{a}$ par cette expression dans (2.6.6) :

$$\vec{V}(t, M(t)) = \vec{V}(t, M_0(t)) + \frac{d\,\mathcal{B}(t)}{d\,t} \circ \mathcal{B}(t)^{-1} \left(\overrightarrow{M_0(t)\,M(t)}\right)$$

Mais ceci est vrai pour tout choix du point cinématique M . Soit P un point quelconque de $\mathcal{E}$. Choisissons M de telle sorte que sa position à la date t soit $M(t) = P$. Nous avons :

$$\vec{V}(t, P) = \vec{V}(t, M_0(t)) + \frac{d\,\mathcal{B}(t)}{d\,t} \circ \mathcal{B}(t)^{-1} \left(\overrightarrow{M_0(t)\,P}\right)$$

et de même, si Q est un autre point quelconque de $\mathcal{E}$:

$$\vec{V}(t, Q) = \vec{V}(t, M_0(t)) + \frac{d\,\mathcal{B}(t)}{d\,t} \circ \mathcal{B}(t)^{-1} \left(\overrightarrow{M_0(t)\,Q}\right)$$

En retranchant la dernière expression de la précédente on voit que le champ de vecteurs $\vec{V}$ du corps rigide à l'instant t vérifie, quels que soient P et $Q \in \mathcal{E}$:

$$(2.6.7) \qquad \vec{V}(t, Q) = \vec{V}(t, P) + \Phi(t)\,(\overrightarrow{PQ})$$

où on a posé :

$$(2.6.8) \qquad \Phi(t) = \frac{d\,\mathcal{B}(t)}{d\,t} \circ \mathcal{B}(t)^{-1}$$

$\Phi(t)$, composée de deux applications linéaires, est une application linéaire d $\vec{\mathcal{E}}$ dans lui-même. On va voir que, du fait que $\mathcal{B}(t)$ est orthogonale pour tout t , $\Phi(t)$ n'est pas quelconque.

<u>Lemme</u> Pour tout couple $\vec{v}$ et $\vec{w}$ d'éléments de $\vec{\mathcal{E}}$, $\Phi(t)$ vérifie .

$$(2.6.9) \qquad (\Phi(t)\,(\vec{v}))\,.\,\vec{w} + \vec{v}\,.\,(\Phi(t)\,(\vec{w})) = 0$$

Une telle application linéaire d'un espace vectoriel euclidien $\vec{\mathcal{E}}$ dans lui-même est dite <u>antisymétrique</u>.

Démonstration $\mathcal{B}(t)$ étant une application linéaire orthogonale, conserve le produit scalaire, ce qui signifie que si $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont deux vecteurs quelconques de $\vec{\mathcal{E}}$, on a :

$$(\mathcal{B}(t)\ (\vec{u}_1))\ .\ (\mathcal{B}(t)\ (\vec{u}_2)) = \vec{u}_1\ .\ \vec{u}_2$$

donc, le second membre ne dépendant pas de t :

$$\frac{d}{d\,t}\left[\ (\mathcal{B}(t)\ (\vec{u}_1))\ .\ (\mathcal{B}(t)\ (\vec{u}_2))\ \right] = 0$$

Mais on vérifie facilement, si on ne le sait pas déjà, qu'un produit scalaire de deux fonctions de t à valeurs vectorielles, se dérive comme un produit usuel de deux fonctions. On a donc :

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,t}\left[\ (\mathcal{B}(t)\ (\vec{u}_1))\ .\ (\mathcal{B}(t)\ (\vec{u}_2))\ \right] &= \left(\frac{d\,\mathcal{B}(t)}{d\,t}(\vec{u}_1)\right)\ .\ (\mathcal{B}(t)\ (\vec{u}_2)) \\ &+ (\mathcal{B}(t)\ (\vec{u}_1)\ )\ .\ \left(\frac{d\,\mathcal{B}(t)}{d\,t}\ (\vec{u}_2)\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tous $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$, et $\mathcal{B}(t)$ étant inversible, on peut prendre $\vec{u}_1 = \mathcal{B}(t)^{-1}\ (\vec{v})$, $\vec{u}_2 = \mathcal{B}(t)^{-1}\ (\vec{w})$ et on obtient (compte tenu de la définition de $\Phi\,(t)$ (2.6.8) :

$$(\Phi\ (t)\ (\vec{v}))\ .\ \vec{w} + \vec{v}\ .\ (\Phi\ (t)\ (\vec{w})) = 0$$

Or on sait (voir Annexe au présent chapitre) qu'un champ de vecteurs sur $\mathcal{E}$ vérifiant (2.6.7), avec $\Phi\,(t)$ antisymétrique, est un champ de vecteurs affine antisymétrique, ou ce qui est équivalent, un <u>champ de vecteurs équiprojectif</u>, c'est à dire vérifiant :

$$(2.6.10)\qquad \boxed{\vec{V}\ (t,\ P)\ .\ \vec{PQ} = \vec{V}\ (t,\ Q)\ .\ \vec{PQ}}\quad \text{pour tous } P \text{ et } Q \in \mathcal{E}$$

On peut donc énoncer :

<u>Proposition</u> A toute date t, le champ des vecteurs vitesses d'un corps rigide est équiprojectif (donc aussi affine et antisymétrique).

<u>Remarque 1</u> Il est facile de montrer directement que, pour tout t , le champ de vecteurs du corps rigide considéré est équiprojectif. Soient en effet P et Q deux points cinématiques, cinématiquement liés au corps rigide, P (t) et Q (t) leurs positions à la date t . On a puisque le corps est rigide :

$$|\overrightarrow{P(t)\,Q(t)}| = (\overrightarrow{P(t)\,Q(t)} \cdot \overrightarrow{P(t)\,Q(t)})^{\frac{1}{2}} \text{ indépendant de } t .$$

d'où en élevant au carré et en dérivant par rapport à t :

$$\frac{d}{d\,t}\,(\overrightarrow{P(t)\,Q(t)} \cdot \overrightarrow{P(t)\,Q(t)}) = 0$$

Mais un produit scalaire se dérivant comme un produit ordinaire, cela donne :

$$\frac{d}{d\,t}\,(\overrightarrow{P(t)\,Q(t)}) \cdot \overrightarrow{P(t)\,Q(t)} + \overrightarrow{P(t)\,Q(t)} \cdot \frac{d}{d\,t}\,(\overrightarrow{P(t)\,Q(t)}) = 0$$

c'est à dire :

$$2\,\frac{d}{d\,t}\,(\overrightarrow{P(t)\,Q(t)}) \cdot \overrightarrow{P(t)\,Q(t)} = 0$$

Or on a :

$$\overrightarrow{P(t)\,Q(t)} = \overrightarrow{O_g\,Q(t)} - \overrightarrow{O_g\,P(t)}$$

$$\frac{d}{d\,t}\,(\overrightarrow{P(t)\,Q(t)}) = \frac{d\,\overrightarrow{Q(t)}}{d\,t} - \frac{d\,\overrightarrow{P(t)}}{d\,t} = \vec{V}\,(t,\,Q(t)) - \vec{V}\,(t,\,P(t))$$

et par suite

$$2\,(\vec{V}\,(t,\,Q(t)) - \vec{V}\,(t,\,P(t))) \cdot (\overrightarrow{P(t)\,Q(t)}) = 0$$

ce qui exprime la propriété d'équiprojectivité.

<u>Remarque 2</u> On a recherché l'expression du champ de vecteurs d'un corps rigide à partir de la formule (2.6.6) , qui donne le vecteur vitesse d'un point cinématique de ce corps sous forme vectorielle intrinsèque. C'est ainsi qu'on a abouti au résultat (2.6.7) , avec l'expression (2.6.8) de l'application linéaire Φ . Des calculs semblables peuvent être faits à partir de la formule (2.6.4) exprimant les composantes du vecteur vitesse, ou de la formule (2.6.5) qui en est l'analogue sous forme matricielle. Le lecteur est instamment invité à refaire ces calculs lui-même en détail, surtout s'il ne manie pas encore avec beaucoup d'aisance la dérivation de fonctions vectorielles.

Ainsi par exemple, en partant de (2.6.4) , et compte tenu de :

$$(2.6.11) \qquad a_i = \sum_{k=1}^{3} C_{ik}(t)\,(x_k(t) - A_k(t)) \qquad 1 \leqslant i \leqslant 3$$

qu'on obtient en inversant (2.6.1) , et en désignant par $C_{ik}(t)$ les coefficients de la matrice $C(t)$ inverse de $B(t) = (B_{ik}(t))$, on trouve :

$$(2.6.12) \qquad V_i(t) = \frac{d\,A_i(t)}{d\,t} + \sum_{k=1}^{3} \varphi_{ik}(t)\,(x_k(t) - A_k(t))$$

où on a désigné par $\varphi_{ik}(t)$ les coefficients de la matrice $\varphi(t)$, produit des matrices $\frac{d\,B(t)}{d\,t}$ (à gauche) et $C(t)$ (à droite) :

$$(2.6.13) \qquad \varphi_{ik}(t) = \sum_{\ell=1}^{3} \left(\frac{d\,B_{i\ell}(t)}{d\,t}\right) C_{\ell k}(t) \quad ; \quad \varphi(t) = \frac{d\,B(t)}{d\,t}\,C(t)$$

Comme précédemment, puisqu'on considère maintenant le champ des vecteurs vitesses, à la date t , du corps rigide, on écrit $V_i(t, x_1, x_2, x_3)$ au lieu de $V_i(t)$, (x_1, x_2, x_3) désignant les coordonnées de la position, à la date t , du point cinématique considéré (auparavant désignées par $x_i(t)$).
La formule (2.6.12) s'écrit :

$$(2.6.14) \qquad V_i(t, x_1, x_2, x_3) = \frac{d\,A_i(t)}{d\,t} + \sum_{k=1}^{3} \varphi_{ik}(t)\,(x_k - A_k(t))$$

où on remarque que les $A_i(t)$ sont les coordonnées de la position, à la date t , du point cinématique M_0 . Les $\varphi_{ik}(t)$, définis par (2.6.13) , sont les coefficients de la matrice qui exprime, dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, l'application linéaire $\Phi(t)$ de $\vec{\mathcal{E}}$ dans lui-même définie en (2.6.8). On voit alors facilement que la propriété d'antisymétrie de l'application $\Phi(t)$ se traduit par l'antisymétrie de sa matrice représentative :

$$(2.6.16) \qquad \varphi_{ik}(t) = -\varphi_{ki}(t)$$

2 . 7 Eléments caractéristiques du champ de vitesses d'un corps rigide.

On conserve les hypothèses du paragraphe précédent, et on suppose de plus $\mathcal{E}$ orienté. On trouvera en Annexe les résultats de l'étude des champs de vecteurs équiprojectifs sur un espace affine euclidien orienté de dimension 3 . En les appliquant on obtient :

Proposition 1. A chaque date $t \in]t_1, t_2[$, le champ des vecteurs vitesses du corps rigide considéré est de la forme (P et Q étant deux points de $\mathcal{E}$) :

$$(2.7.1) \quad \boxed{\vec{V}(t, Q) = \vec{V}(t, P) + \Omega(t) \wedge \vec{PQ}}$$

$\vec{\Omega}(t)$ est appelé vecteur taux de rotation du corps rigide.

2. Si $\vec{\Omega}(t) = 0$, le champ des vecteurs vitesses à la date t est constant dans l'espace. Sa valeur $\vec{V}(t, P)$ ($P \in \mathcal{E}$ quelconque) est appelée vecteur vitesse de glissement du corps à la date t . On dit alors qu'à la date t, le mouvement du corps est tangent à une translation.

3. Si $\vec{\Omega}(t) \neq 0$, il existe une droite unique $\Delta(t)$, appelée axe instantané de rotation et de glissement du corps à la date t , et un vecteur $\vec{V}_1(t) \in \vec{\mathcal{E}}$ parallèle à $\vec{\Omega}(t)$ unique appelé vecteur vitesse de glissement du corps à la date t , tel que, si $P \in \Delta(t)$ et $Q \in \mathcal{E}$ quelconque :

$$(2.7.2) \quad \vec{V}(t, Q) = \vec{V}_1(t) + \vec{\Omega}(t) \wedge \vec{PQ}$$

Lorsque $\vec{V}_1(t) = 0$, on dit que le mouvement du corps est tangent à la date t à une rotation d'axe $\Delta(t)$, et dans ce cas on appelle Δ axe instantané de rotation à la date t .

Cette proposition montre que dans le cas général, le champ des vecteurs vitesses du corps rigide est somme de deux champs de vecteurs :

un champ $\vec{V}_1(t)$ constant dans l'espace ;

un champ $\vec{V}_2(t)$ de la forme :

$$\vec{V}_2(t, Q) = \vec{\Omega}(t) \wedge \vec{PQ}$$

où $P \in \Delta(t)$ et $Q \in \mathcal{E}$ quelconque. Tous deux sont équiprojectifs, donc peuvent être considérés comme des champs de vecteurs vitesses d'un corps rigide ; le premier $\vec{V}_1(t)$ est celui d'un mouvement tangent à l'instant t à une translation, le second celui d'un mouvement tangent à l'instant t à une rotation d'axe $\Delta(t)$ ($\Delta(t)$ étant parallèle à $\vec{V}_1(t)$).