3 . 1 Système matériel et masse.

L'expérience a conduit à attribuer à tout corps physique A , existant à un instant T , une grandeur $\vec{m}(A, T)$ appelée masse de A à l'instant T , élément d'un espace vectoriel $\vec{\mathcal{M}}$ de dimension 1 . On observe de plus que tous les corps physiques ont des masses non nulles, toutes éléments du même demi - espace (ceci signifie que si A et B sont deux corps physiques dont les masses à l'instant T sont $\vec{m}(A, T)$ et $\vec{m}(B, T)$, il existe un réel positif λ tel que $\vec{m}(A, T) = \lambda \vec{m}(B, T)$). On désignera ce demi - espace par $\vec{\mathcal{M}}^+$. Une fois choisi un élément non nul $\vec{m}_0$ de $\vec{\mathcal{M}}^+$ pour unité, la masse de tout corps physique A à l'instant T peut être représentée par le nombre réel positif $m(A, T)$, tel que :

$$(3.1.1) \qquad \vec{m}(A, T) = m(A, T)\, \vec{m}_0$$

On supposera dans la suite l'unité de masse $\vec{m}_0$ choisie et, avec un léger abus de langage, on appellera masse de A à l'instant T le nombre réel $m(A, T)$. Il faudra toutefois savoir qu'on peut toujours modifier le choix de l'unité de masse, et qu'alors le nombre $m(A, T)$ se trouve en conséquence modifié.

Les moyens permettant la détermination de la masse d'un corps physique utilisent les lois de la dynamique. On ne pourra donc les indiquer que plus loin dans ce cours. On va toutefois signaler dès maintenant les deux propriétés essentielles de la masse qui ont pu être dégagées de l'expérience. La plus simple est l'additivité :

Additivité de la masse. Soient A_1 et A_2 deux corps physiques existant à l'instant T , et occupant à cet instant dans l'espace $\mathcal{E}_T$ deux positions A_{1T} et A_{2T} disjointes. Alors la masse, à l'instant T , du corps physique réunion de A_1 et A_2 , est somme des masses à l'instant T de A_1 et de A_2 :

$$(3.1.2) \qquad m(A_1 \cup A_2 , T) = m(A_1 , T) + m(A_2 , T)$$

La seconde propriété importante est la conservation de la masse. Il est plus délicat de l'énoncer avec rigueur, car seuls certains corps physiques la possèdent, et il est difficile de définir ces corps physiques autrement que par le fait, précisément, que leur masse est conservée. On fera donc appel à l'intuition. La masse d'un corps physique est une manière de mesurer la quantité de matière constituant ce corps.

La matière est considérée, en physique classique, comme indestructible, bien que susceptible de se transformer ; cette idée est généralement attribuée à Lavoisier (1787). On appelle système matériel un corps physique (ou un ensemble de plusieurs corps physiques), existant pendant un intervalle de temps $]T_1, T_2[$ tel que toute la matière contenue dans ce corps à un instant T, soit également contenue dans ce corps à tout autre instant T' de l'intervalle $]T_1, T_2[$. Donnons quelques exemples :

- un récipient contenant de l'eau et de la glace, ces deux corps pouvant au cours du temps se transformer l'un en l'autre, mais non disparaître, est un système matériel ;

- l'ensemble d'une automobile, du contenu de son réservoir, de l'air absorbé par son moteur pour la combustion du carburant pendant un intervalle de temps $]T_1, T_2[$, et de tous les gaz d'échappement produits pendant cette période, est un système matériel ; l'automobile seule n'est pas un système matériel ;

- un liquide contenu dans un récipient sous une atmosphère de gaz carbonique, et qui n'est pas initialement saturé de ce gaz, n'est pas un système matériel (car au cours du temps ce liquide va dissoudre une certaine quantité de gaz carbonique) ; par contre l'ensemble du liquide et de l'atmosphère qui le surmonte (supposée limitée par le couvercle du récipient) est un système matériel.

On peut maintenant énoncer la seconde propriété de la masse :

Conservation de la masse. La masse de tout système matériel reste constante au cours du temps.

La conservation de la masse d'un système matériel permet de prendre, pour définir l'unité de masse $\vec{m}_0$, la masse d'un corps physique déterminé, qu'on a de bonnes raisons de considérer comme un système matériel. Ainsi la définition légale actuelle du kilogramme est la suivante : c'est la masse du corps physique appelé kilogramme étalon, en platine iridié, situé dans le pavillon de Breteuil à Sèvres. Le métal dont est constitué ce corps est considéré comme suffisamment inaltérable, et les précautions prises pour éviter toute usure sont telles, qu'on peut en effet le considérer comme un système matériel. Cette définition a toutefois quelque chose de peu satisfaisant : il serait préférable de définir l'unité de masse en faisant référence à un phénomène physique reproductible, comme on l'a fait pour les unités de longueur et de temps. On pourrait par exemple songer à définir le kilogramme comme la masse d'un nombre fixé de molécules d'hydrogène, mais une telle définition n'est pas utilisable en pratique compte tenu des méthodes physiques actuelles, qui ne permettent pas de compter un grand nombre de molécules d'hydrogène avec une précision suffi-

3 . 2 . La description mathématique de la répartition des masses.

Tout ce qui précède concerne la masse totale d'un corps physique. Si ce corps n'est pas réduit à un point cinématique il est possible, au moins conceptuellement, de le subdiviser en parties occupant, à un instant donné, des positions disjointes dans l'espace, et par conséquent d'attribuer une masse à chacune de ces parties. On est donc naturellement amené à chercher un moyen commode pour décrire la répartition dans l'espace, à un instant donné, des masses des différentes parties en lesquelles on peut subdiviser un corps physique. Il existe un outil mathématique bien adapté pour faire cette description, car il incorpore la propriété d'additivité : c'est la théorie de la mesure. On peut d'ailleurs montrer que sous certaines hypothèses raisonnables (qui, pour l'essentiel, consistent à supposer que la propriété d'additivité de la masse reste vraie pour une famille d'une infinité dénombrable de corps physiques deux à deux disjoints), une mesure (au sens mathématique) est le seul outil réellement apte à décrire mathématiquement la répartition dans l'espace de la masse d'un corps physique.

Signalons, pour les étudiants suivant l'option de Probabilités, que c'est cett même notion de mesure qui est utilisée dans la définition d'un espace probabilisé. Signalons aussi que cette notion de mesure est à la base des théories "sérieuses" de l'intégration (intégrale de Lebesgue) qui seront enseignées en second cycle.

Il serait trop long de donner dans ce cours un exposé, même abrégé, de la théorie de la mesure, qui sans être vraiment très difficile, comporte un certain nombre de points délicats, et d'ailleurs n'est pas au programme. On se contentera donc de quelques indications succintes, suffisantes pour les cas les plus fréquemment rencontrés en pratique.

Soit un corps physique A , occupant à l'instant T une partie A_T de l'espace physique $\mathcal{E}_T$ (espace affine euclidien de dimension 3). La répartition dans l'espace de la masse du corps A à l'instant T est mathématiquement représentée par une mesure positive m sur l'ensemble A_T , c'est à dire par une fonction, ayant certaines propriétés précisées ci-dessous, définie sur un certain sous ensemble $\mathcal{B}$ de toutes les parties de A_T et à valeurs réelles ≥ 0, qui à toute partie $B \in \mathcal{B}$, associe le nombre $m(B)$, masse à l'instant T de la partie du corps A qui, à cet instant, occupe la partie B de l'espace $\mathcal{E}_T$.

Les parties de A_T éléments de $\mathcal{B}$, dont on peut définir la masse, sont dites mesurables. Il serait trop long d'en donner une définition précise. Disons simplement que le praticien n'a guère à se préoccuper de ce sujet, toutes les parties bornées "raisonnables" de A_T rencontrées en pratique étant toujours mesurables (il est même difficile de donner des exemples de parties bornées qui ne le sont pas, bien qu'on montre qu'il en existe en général).

Quant aux parties non bornées, il est tout à fait naturel qu'on ne puisse pas toujours leur attribuer une masse (certaines d'entre elles pouvant avoir une "masse infinie"). Il est d'ailleurs possible d'étendre la notion de mesure pour permettre à de telles parties d'être éléments de $\mathcal{B}$, en convenant que m peut prendre la valeur $+\infty$.

Par définition même d'une mesure, la propriété d'additivité des masses est vérifiée : soient $B_1, B_2 \ldots B_n$ des parties mesurables de A_T, deux à deux disjointes :

$$(3.2.1) \qquad B_i \cap B_j = \emptyset \quad \text{si} \quad i \neq j$$

On a alors :

$$(3.2.2) \qquad m\,(B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n) = \sum_{i=1}^{n} m\,(B_i)$$

On a même la propriété d'additivité dénombrable : si $(B_i \; ; \; i \in \mathbb{N}^*)$ est une famille dénombrable de parties mesurables de A_T deux à deux disjointes, c'est à dire vérifiant (3.2.1), on a :

$$(3.2.3) \qquad m\,\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} m\,(B_i)$$

l'égalité étant vraie aussi bien si la masse de $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ est finie (dans ce cas la série à termes positifs figurant au second membre converge) que si elle est égale à $+\infty$ (et dans ce cas, la série figurant au second membre diverge).

Une notation fréquemment employée pour désigner la masse $m\,(B)$ d'une partie B de A_T est :

$$(3.2.4) \qquad m\,(B) = \int_B dm$$

Cette notation, dont la justification est liée à la théorie générale de l'intégration, sera utilisée dans les cas où elle apparaîtra commode.

En pratique les mesures les plus fréquemment rencontrées pour décrire une répartition de masses à un instant donné; appartiennent à l'un des quatre types suivants, ou en sont une combinaison.

Répartitions de masses définies par une densité de masse

Il existe alors une fonction ρ , définie sur A_T et à valeurs réelles $\geqslant 0$ appelée densité de masse, ou <u>masse volumique</u> du corps A à l'instant T , en général suffisamment régulière (par exemple continue par morceaux) telle que, pour toute partie mesurable B de A_T

$$(3.2.5) \quad m\,(B) = \iiint_B \rho\,(x)\; d^3\, x$$

Le second membre de cette expression désigne l'intégrale dans B de la fonction ρ , relativement à la mesure élément de volume de $\mathscr{E}_T$. En pratique, pour la calculer, on choisit un repère affine orthonormé $(O_{\mathscr{E}_T}, \vec{e}_{1T}, \vec{e}_{2T}, \vec{e}_{3T})$ de $\mathscr{E}_T$, et on désigne par (x_1, x_2, x_3) les coordonnées d'un point x de $\mathscr{E}_T$ dans ce repère. La fonction ρ apparaît alors comme une fonction des trois variables réelles x_1, x_2, x_3 et on a :

$$(3.2.6) \quad m\,(B) = \iiint_B \rho\,(x_1, x_2, x_3)\; d\, x_1 \;\; d\, x_2 \;\; d\, x_3$$

On montre que cette intégrale triple ne dépend pas du choix du repère affine orthonormé de $\mathscr{E}_T$, ce qui justifie l'écriture condensée figurant au second membre de (3.2.5).

<u>Répartitions de masses définies par une densité superficielle</u>

Dans ce cas, la position A_T du corps A à l'instant T , est une <u>surface</u> de l'espace $\mathscr{E}_T$, que l'on supposera suffisamment régulière (par exemple de classe C^1 par morceaux), et il existe une fonction ρ_S définie sur A_T et à valeurs réelles $\geqslant 0$, appelée densité de masse superficielle, ou <u>masse surfacique</u> du corps A à l'instant T , elle aussi suffisamment régulière (par exemple continue par morceaux) telle que pour toute partie mesurable B de A_T :

$$(3.2.7) \quad m\,(B) = \iint_B \rho_S\,(x) \;\; d^2\, \sigma\,(x)$$

Le second membre de cette expression désigne l'intégrale dans B de la fonction ρ_S , relativement à la mesure élément d'aire de la surface A_T. On en rappelle ci-dessous la définition, tout en donnant un moyen de la calculer. Supposons la surface A_T paramétrée par deux paramètres scalaires u et v. Cela signifie qu'il existe une application bijective $\varphi : (u, v) \to \varphi\,(u, v)$ d'une partie ouverte S de $\mathbb{R}^2$ sur A_T. On suppose de plus cette application de classe C^1 , c'est à dire telle que les deux dérivées partielles $\dfrac{\partial \vec{\varphi}\,(u, v)}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial \vec{\varphi}\,(u, v)}{\partial v}$, (qui sont des vecteurs éléments de $\vec{\mathscr{E}}_T$, espace vectoriel associé à $\mathscr{E}_T$) existent en tout point (u, v) de S et soient des fonctions continues sur S.

On suppose enfin ces deux vecteurs linéairement indépendants en tout point (u, v) de S. On a alors par définition :

$$(3.2.8) \qquad m(B) = \iint_{\varphi^{-1}(B)} \rho_S(\varphi(u, v)) \left| \frac{\partial \vec{\varphi}(u, v)}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{\varphi}(u, v)}{\partial v} \right| du \, dv$$

On montre que cette intégrale double ne dépend pas du choix des paramètres (u, v) servant à décrire la surface A_T. Remarquons aussi que la définition s'étend au cas (très fréquent en pratique) où la surface A_T ne peut être entièrement paramétrée par un système unique de paramètres (u, v) : il suffit de décomposer la surface en un nombre fini de parties ouvertes disjointes dans chacune desquelles un tel système de paramètres existe, et d'ajouter les intégrales correspondantes ; on doit toutefois prendre soin de faire en sorte que la réunion des parties ouvertes utilisées ne diffère de la surface entière A_T que par une partie négligeable (en un sens mathématique précis, qu'on ne cherchera pas à définir ici : disons simplement qu'une courbe régulière, de classe C^1 par morceaux, tracée sur A_T, est une partie négligeable de A_T).

Répartitions de masses définies par une densité linéaire.

Dans ce cas, la position A_T du corps A à l'instant T est une courbe de l'espace $\mathcal{E}_T$, que l'on supposera suffisamment régulière (par exemple de classe C^1 par morceaux) et il existe une fonction ρ_L définie sur A_T et à valeurs réelles ≥ 0, appelée densité de masse linéique, ou masse linéique, du corps A à l'instant T, elle aussi suffisamment régulière (par exemple continue par morceaux) telle que pour toute partie mesurable B de A_T :

$$(3.2.9) \qquad m(B) = \int_B \rho_L(x) \, ds(x)$$

Le second membre de cette expression désigne l'intégrale curviligne de la fonction ρ_L sur B, relativement à la mesure élément d'arc de la courbe A_T. On en rappelle ci-dessous la définition, qui est aussi un moyen de la calculer. Supposons la courbe A_T paramétrée par un paramètre scalaire λ. Cela signifie qu'il existe une application bijective ψ d'un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ sur A_T. On suppose ψ de classe C^1, ce qui signifie que la dérivée $\frac{d\vec{\psi}(\lambda)}{d\lambda}$ (qui est un vecteur de $\vec{\mathcal{E}}_T$) existe pour tout $\lambda \in I$, et qu'elle est fonction continue de λ. On suppose de plus ce vecteur $\frac{d\vec{\psi}(\lambda)}{d\lambda}$ partout non nul. On a alors, si par exemple B est l'arc de courbe $\psi([a, b])$ ($[a, b]$ étant un intervalle contenu dans I) :

$$(3.2.10) \qquad m(B) = \int_a^b \rho_L(\psi(\lambda)) \left| \frac{d\vec{\psi}(\lambda)}{d\lambda} \right| d\lambda$$

On montre, ici encore, que l'intégrale figurant au second membre ne dépend pas du choix du paramètre λ servant à décrire la courbe. Comme dans le cas précédent, la définition s'étend au cas où, pour paramétrer la courbe A_T, on doit la décomposer en un nombre fini d'arcs ouverts disjoints, sur chacun desquels on peut utiliser un paramétrage différent. La réunion de ces arcs doit ne différer de A_T que par une partie négligeable (par exemple, un nombre fini de points).

Répartition de masses discrète.

Dans ce cas, la position A_T du corps A à l'instant T est un ensemble fini $\left\{ B_i \; ; \; 1 \leqslant i \leqslant n \right\}$. Chaque point cinématique de A qui, à l'instant T, occupe la position M_i, a à l'instant T la masse m_i. D'après la propriété d'additivité, toute partie B du corps A dont la position à l'instant T est $\left\{ B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots B_{i_p} \; ; \; 1 \leqslant i_1, \ldots, i_p \leqslant n \right\}$ a évidemment pour masse à l'instant T :

$$(3.2.11) \qquad m\left(\left\{ B_{i_1}, \ldots B_{i_p} \right\} \right) = \sum_{k=1}^{p} m_{i_k}$$

Remarque. Les corps physiques réels ont toujours une répartition de masses se rattachant au premier type cité, c'est à dire définie par une densité de masse. Cependant, on utilise souvent en mécanique des schématisations de ces corps, dans lesquelles on néglige certaines des dimensions de ces corps, et on doit alors, pour représenter la répartition de leurs masses, utiliser l'un des autres types cités. Ainsi par exemple, une plaque de faible épaisseur sera schématisée par une surface, sa répartition des masses étant définie par une masse surfacique ; une tige (ou un câble) de section suffisamment petite, sera schématisée par une courbe, sa répartition des masses étant définie par une masse linéique ; enfin, un corps physique dont toutes les dimensions sont petites, sera schématisé par un point cinématique auquel est attribuée une masse finie non nulle.

3 . 3 . Torseurs cinétique et dynamique d'un système matériel

Soit un système matériel A en mouvement pendant l'intervalle de temps $]\, T_1, T_2\, [$. Par définition d'un système matériel, toute la matière contenue dans ce système à un instant quelconque $T \in\,]\, T_1, T_2\, [$, est encore contenue dans ce système à tout autre instant $T' \in\,]\, T_1, T_2\, [$. On a vu (paragraphe 3.1 que cette propriété entraîne la conservation de la masse totale du système matériel considéré.

On va, dans ce paragraphe (ainsi d'ailleurs que dans la suite de ce cours, sauf s'il est fait mention explicite du contraire) supposer que le système matériel A considéré possède une propriété encore plus forte.

Soit B une partie du système matériel A , dont la position à un instant T est la partie B_T de $\mathcal{E}_T$, et à un instant T' la partie $B_{T'}$ de $\mathcal{E}_{T'}$. On supposera que, quels que soient B et quels que soient les instants T et T' éléments de $]T_1, T_2[$, toute la matière contenue dans B_T à l'instant T , est encore contenue dans $B_{T'}$ à l'instant T' . En d'autres termes, on suppose que, non seulement A entier, mais toute partie B de A , est un système matériel.

Cette hypothèse est beaucoup plus restrictive, que celle consistant à supposer que seul A entier est un système matériel. En pratique, presque tous les phénomènes rencontrés dans la nature (à l'exception de ceux où des réactions nucléaires entraînent une variation notable de masse, comme ceux qui ont lieu dans les étoiles) peuvent être étudiés grâce à la notion de système matériel, à condition d'inclure dans le système étudié tous les corps physiques mis en jeu. Par contre, de nombreux phénomènes couramment rencontrés en pratique ne peuvent pas être schématisés par des systèmes matériels dont toute partie est aussi un système matériel. Il en est ainsi par exemple de tous les phénomènes de diffusion : lorsque deux masses de liquides de nature différente, miscibles, (par exemple de l'eau douce et de l'eau salée), sont mises en contact, ces deux liquides se mélangent par diffusion, de sorte que le sel présent dans une partie du système, ne reste pas confiné à cette partie au cours du temps.

Signalons qu'il est possible de traiter les systèmes matériels dont toutes les parties ne sont pas nécessairement des systèmes matériels, en utilisant diverses notions (flux de diffusion, etc...) qui débordent le cadre de ce cours.

On va étudier le mouvement du système matériel A , dans un référentiel $\mathcal{R}$ de domaine de temps $]T_1, T_2[$. L'espace - temps rapporté à ce référentiel est alors un produit cartésien $]T_1, T_2[\times \mathcal{E}$, $\mathcal{E}$ étant un espace affine euclidien de dimension 3. On a vu (paragraphe 2.4) que le mouvement de A est décrit dans $\mathcal{R}$ par une application :

$$\varphi :]T_1, T_2[\times A \to \mathcal{E}$$

où A est un ensemble abstrait (désigné par la même lettre que le système, pour simplifier l'écriture) qu'on identifiera en pratique avec une partie de $\mathcal{E}$, par exemple celle occupée par le système à un instant fixé $T_0 \in]T_1, T_2[$. Chaque point N de A représente un point cinématique du système, dont la position à l'instant T est $\varphi(T, N)$. On rappelle que pour tout T fixé, l'application $N \to \varphi(T, N)$ est une bijection de A sur $A_T = \varphi(T, A)$.

On suppose de plus choisi un repère du temps $(O_{\mathcal{T}}, \vec{e}_0)$, et un repère affine orthonormé positif $(O_{\mathcal{E}}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de l'espace affine $\mathcal{E}$, supposé orienté.

En exprimant chaque instant T en fonction de sa date t, on peut considérer l'application φ comme étant une application de $]t_1, t_2[\times A$ dans $\mathscr{E}$ (t_1 et t_2 étant les dates de T_1 et T_2 respectivement). Pour tout point $N \in A$ fixé, on suppose l'application :

$$t \to \varphi(t, N)$$

de classe C^2. On sait alors que les vecteurs vitesse et accélération du point cinématique N existent, et sont, respectivement, à la date t :

$$(3.3.1) \qquad \vec{V}(t, N_t) = \frac{d}{d\,t} \overrightarrow{\varphi(t, N)} = \frac{d\,\vec{N}_t}{d\,t}$$

$$(3.3.2) \qquad \vec{\Gamma}(t, N_t) = \frac{d^2}{d\,t^2} \overrightarrow{\varphi(t, N)} = \frac{d^2\,\vec{N}_t}{d\,t^2}$$

où on a posé, pour alléger l'écriture :

$$(3.3.3) \qquad \varphi(t, N) = N_t$$

On sait de plus que, pour tout point P de $A_t = \varphi(t, A)$, il existe un point cinématique unique $N \in A$ qui, à la date t, occupe la position P (c'est à dire tel que $\varphi(t, N) = P$). Par conséquent, $\vec{V}$ et $\vec{\Gamma}$ sont, pour chaque date t, des <u>champs de vecteurs</u> sur A_t. On les supposera dans la suite suffisamment réguliers (par exemple, continus par morceaux).

D'autre part, la répartition des masses du système matériel A à la date t, est décrite par la donnée d'une mesure positive m_t sur A_t. Toute partie B de A étant, d'après l'hypothèse ci-dessus, un système matériel, on a, si t et t' sont deux dates quelconques éléments de $]t_1, t_2[$:

$$(3.3.4) \qquad m_t(B_t) = m_{t'}(B_{t'})$$

où $B_t = \varphi(t, B)$, et $B_{t'} = \varphi(t', B)$ sont les positions supposées mesurables occupées par B aux dates t et t' respectivement.

On sait (Annexe au présent chapitre, paragraphe 3.A.3) que la donnée d'un <u>champ de vecteurs</u> et d'une <u>mesure positive</u> sur une partie A_t de $\mathscr{E}$, détermine un torseur sur $\mathscr{E}$. Appliquant cela avec, pour mesure positive, la mesure m_t définissant la répartition des masses à la date t, et pour champ de vecteurs, respectivement les champs des vecteurs vitesse et accélération à la date t, on obtient :

Définitions On appelle torseur cinétique (resp. torseur dynamique) du système matériel A à la date t , relativement au repère $\mathcal{R}$ considéré de l'espace - temps, le torseur sur $\mathcal{E}$ déterminée par la donnée de la mesure m_t définissant la répartition des masses de A à l'instant t , et du champ des vecteurs vitesses $\vec{V}(t, .)$ (resp. du champ des vecteurs accélération $\vec{\Gamma}(t, .)$) du système A à la date t .

On désignera dans la suite par $\mathcal{E}$ le torseur cinétique, et $\mathcal{A}$ le torseur dynamique.

En utilisant les formules établies en annexe 3.A.3 , on obtient les expressions des éléments de réduction des torseurs cinétique et dynamique de A à la date t , en un point P quelconque de $\mathcal{E}$:

- résultante générale du torseur cinétique, appelée résultante cinétique (ou quantité de mouvement, ou impulsion) de A , à la date t :

$$(3.3.5) \quad \boxed{\vec{R}_c = \int_{A_t} \vec{V}(t, x) \, d\, m_t(x)}$$

- résultante générale du torseur dynamique (appelée résultante dynamique du système A) :

$$(3.3.6) \quad \boxed{\vec{R}_d = \int_{A_t} \vec{\Gamma}(t, x) \, d\, m_t(x)}$$

- moment du torseur cinétique au point P ; appelé moment cinétique de A, à la date t et au point P :

$$(3.3.7) \quad \boxed{\vec{M}_c(P) = \int_{A_t} \vec{Px} \wedge \vec{V}(t, x) \, d\, m_t(x)}$$

- moment du torseur dynamique, appelé moment dynamique du système A au point P :

$$(3.3.8) \quad \boxed{\vec{M}_d(P) = \int_{A_t} \vec{Px} \wedge \vec{\Gamma}(t, x) \, d\, m_t(x)}$$

Si $\vec{W}$ est un champ de vecteurs équiprojectif quelconque sur $\mathcal{E}$, les valeurs, pour ce champ $\vec{W}$, des torseurs cinétique et dynamique, à la date t , sont respectivement, toujours d'après les formules établies en annexe 3.A.3 :

$$(3.3.9) \quad \mathcal{E}(\vec{W}) = \int_{A_t} \vec{V}(t, x) \cdot \vec{W}(x) \, d\, m_t(x)$$

$$(3.3.\ )\quad \mathcal{A}(\vec{W}) = \int_{A_t} \vec{\Gamma}\,(t,\,x)\,.\,\vec{W}\,(x)\,d\,m_t\,(x)$$

Afin d'illustrer les formules abstraites ci-dessus par des exemples plus concrets, on examinera successivement le cas où le corps A est constitué d'un nombre fini de points cinématiques avec une répartition de masses discrètes, et celui où la répartition des masses de A est définie par une densité de masse. Les cas où cette répartition est définie par une densité superficielle, ou une densité linéique, conduisent à des formules analogues.

a) Cas où le système A est formé d'un nombre fini de points cinématiques.

$A = \left\{ N_1, N_2, \ldots N_p \right\}$ ensemble fini. A la date t, la position du point cinématique N_i est $N_i(t)$. On désigne par m_i la masse de la partie de A réduite au point cinématique N_i. Puisqu'on suppose que toute partie de A est un système matériel, m_i est indépendant de t.

Si $\vec{W}$ est un champ de vecteurs équiprojectif quelconque en $\mathcal{E}$, les valeurs pour ce champ des torseurs cinétique et dynamique, sont respectivement :

$$(3.3.11)\quad \mathcal{C}\,(\vec{W}) = \sum_{i=1}^{p} m_i\ \vec{W}\,(N_i(t))\,.\,\frac{d\,\vec{N}_i(t)}{d\,t}$$

$$(3.3.12)\quad \mathcal{A}(\vec{W}) = \sum_{i=1}^{p} m_i\ \vec{W}\,(N_i(t))\,.\,\frac{d^2\,\vec{N}_i(t)}{d\,t^2}$$

Les éléments de réduction des torseurs cinétique et dynamique en un point P quelconque de $\mathcal{E}$, à la date t, sont :

$$(3.3.13)\quad \vec{R}_c = \sum_{i=1}^{p} m_i\ \frac{d\,\vec{N}_i(t)}{d\,t}$$ résultante cinétique

$$(3.3.14)\quad \vec{M}_c(P) = \sum_{i=1}^{p} m_i\ \overrightarrow{PN_i}(t)\wedge\frac{d\,\vec{N}_i(t)}{d\,t}$$ moment cinétique en P

$$(3.3.15)\quad \vec{R}_d = \sum_{i=1}^{p} m_i\ \frac{d^2\,\vec{N}_i(t)}{d\,t^2}$$ résultante dynamique

$$(3.3.16)\quad \vec{M}_d(P) = \sum_{i=1}^{p} m_i\ \overrightarrow{PN_i}(t)\wedge\frac{d^2\,\vec{N}_i(t)}{d\,t^2}$$ moment dynamique en P

b) Cas où la répartition de masse de A est définie par une densité de masse.

Dans ce cas, pour chaque date t, on a une masse volumique ρ_t définie sur A_t, à valeurs ≥ 0, supposée suffisamment régulière. Les valeurs des torseurs cinétique et dynamique à la date t, pour un champ de vecteurs équiprojectif quelconque $\vec{W}$ sur $\mathcal{E}$, sont respectivement :

$$(3.3.17) \quad \mathcal{C}(\vec{W}) = \iiint_{A_t} \vec{W}_i(x) \cdot \vec{V}(t, x)\, \rho_t(x)\, d^3x$$

$$(3.3.18) \quad \mathcal{A}(\vec{W}) = \iiint_{A_t} \vec{W}_i(x) \cdot \vec{\Gamma}(t, x)\, \rho_t(x)\, d^3x$$

Les éléments de réduction des torseurs cinétique et dynamique, en un point P quelconque de $\mathcal{E}$, sont à la date t :

$$(3.3.19) \quad \vec{R}_c = \iiint_{A_t} \vec{V}(t, x)\, \rho_t(x)\, d^3x \qquad \underline{\text{résultante cinétique}}$$

$$(3.3.20) \quad \vec{M}_c(P) = \iiint_{A_t} \vec{Px} \wedge \vec{V}(t, x)\, \rho_t(x)\, d^3x \qquad \underline{\text{moment cinétique en } P}$$

$$(3.3.21) \quad \vec{R}_d = \iiint_{A_t} \vec{\Gamma}(t, x)\, \rho_t(x)\, d^3x \qquad \underline{\text{résultante dynamique}}$$

$$(3.3.22) \quad \vec{M}_d(P) = \iiint_{A_t} \vec{Px} \wedge \vec{\Gamma}(t, x)\, \rho_t(x)\, d^3x \qquad \underline{\text{moment dynamique en } P}$$

Le théorème suivant est le résultat essentiel du présent paragraphe. Il est valable dans le cas le plus général, où la répartition de masse de A est définie par une mesure positive quelconque.

Théorème Soit A un système matériel dont toute partie est un système matériel. L'espace - temps étant rapporté à un repère quelconque, la dérivée par rapport à la date t du torseur cinétique $\mathcal{C}(t)$ du corps A est, à chaque t, égale au torseur dynamique $\mathcal{A}(t)$ de A :

$$(3.3.23) \quad \boxed{\frac{d\, \mathcal{C}(t)}{d\, t} = \mathcal{A}(t)}$$

<u>Corollaires</u> : Sous les mêmes hypothèses, la dérivée par rapport à t des éléments de réduction $\vec{R}_c(t)$ (résultante cinétique) et $\vec{M}_c(t, P)$ (moment cinétique <u>en un point P fixe dans le repère considéré</u>) du torseur cinétique $\mathcal{C}(t)$, sont égaux à chaque t, respectivement, aux éléments de réduction $\vec{R}_d(t)$ (résultante dynamique) et $\vec{M}_d(t, P)$ (moment dynamique au point P) du torseur dynamique $\mathcal{A}(t)$:

$$(3.3.24) \quad \boxed{\frac{d\,\vec{R}_c(t)}{d\,t} = \vec{R}_d(t)}$$

$$(3.3.25) \quad \boxed{\frac{d\,\vec{M}_c(t, P)}{d\,t} = \vec{M}_d(t, P)}$$

<u>Commentaires et esquisse de la démonstration.</u>

1 . Le torseur cinétique $\mathcal{C}$ est une fonction de la variable t, à valeurs dans l'espace vectoriel $\mathcal{G}'$ des torseurs. On a donc bien le droit de le dériver par rapport à t, et sa dérivée $\frac{d\,\mathcal{C}(t)}{d\,t}$ est bien, pour chaque t, un élément de $\mathcal{G}'$, c'est à dire un torseur.

2 . Supposant le théorème établi, la démonstration des corollaires est immédiate, car les deux applications de $\mathcal{G}'$ dans $\vec{\mathcal{E}}$ qui, à un torseur $\mathcal{C}$, font correspondre sa résultante générale $\vec{R}$ (ou son moment $\vec{M}(P)$ en un point P fixé) sont linéaires, et indépendantes et t.

3 . Démonstration du théorème dans le cas où le système A est formé d'un nombre fini de points cinématiques : dérivons l'expression (3.3.11) qui donne la valeur du torseur cinétique, pour un champ de vecteurs équiprojectif $\vec{W}$ quelconque indépendant de t. On a :

$$\frac{d\,\mathcal{C}}{d\,t}(\vec{W}) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{p} m_i\,\vec{W}(N_i(t))\cdot\frac{d\,\vec{N_i}(t)}{d\,t}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} m_i\left[\frac{d}{dt}\left(\vec{W}(N_i(t))\right)\cdot\frac{d\,N_i(t)}{d\,t} + \vec{W}(N_i(t))\cdot\frac{d^2\,\vec{N_i}(t)}{d\,t^2}\right]$$

Mais, si $\vec{\Omega}$ désigne le vecteur taux de rotation du champ de vecteurs équiprojectif $\vec{W}$, on a :

$$\vec{W}(Q) = \vec{W}(P) + \vec{\Omega} \wedge \vec{PQ}$$

et par conséquent :

$$\frac{d}{d\,t}\,(\vec{W}\,(N_i(t))) = \lim_{t'\to t,\ t'\neq t} \frac{\vec{W}\,(N_i(t')) - \vec{W}\,(N_i(t))}{t' - t}$$

$$= \lim_{t'\to t,\ t'\neq t} \vec{\Omega} \wedge \frac{\overrightarrow{N_i(t)\,N_i(t')}}{t' - t} = \vec{\Omega} \wedge \frac{d\,\vec{N_i}(t)}{d\,t}$$

On a donc finalement :

$$\frac{d\,\mathcal{P}}{d\,t}\,(\vec{W}) = \sum_{i=1}^{p} m_i \left[\vec{W}\,(N_i(t))\ .\ \frac{d^2\,\vec{N}_i(t)}{d\,t^2} + (\vec{\Omega} \wedge \frac{d\,\vec{N}_i(t)}{d\,t})\ .\ \frac{d\,\vec{N}_i(t)}{d\,t}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{p} m_i\ \vec{W}\,(N_i(t))\ .\ \frac{d^2\,\vec{N}_i(t)}{d\,t^2} = \mathcal{A}_t(\vec{W})$$

d'après l'expression (3.3.12).

4 . La démonstration, dans le cas général, fait appel à des notions qui ne sont pas au programme de ce cours. Disons simplement qu'elle consiste, en utilisant la propriété (3.3.4) d'invariance de la masse, à faire un changement de variables dans les intégrales (3.3.9) et (3.3.10) , afin de les ramener à des intégrales calculées sur un ensemble A indépendant de t , relativement à une mesure indépendante de t . Seule la fonction intégrée dépendant alors de t , on peut appliquer un théorème classique de dérivation sous le signe d'intégration.

3 . 4 . Efforts exercés sur un système matériel.

On considère en Mécanique que les corps physiques existant à un même instant, exercent les uns sur les autres des "efforts" (terme pour le moment vague, qu'il va falloir préciser) qui sont les causes des variations, au cours du temps, de leurs mouvements. La Dynamique se propose d'en donner une schématisation mathématique (qui fait l'objet du présent paragraphe), puis d'exprimer les relations qui lient les efforts exercés sur un corps physique, aux grandeurs mathématiques décrivant le mouvement de ce corps (ces relations seront exposées dans le prochain paragraphe).

a) Cas d'un point matériel. On considère un point matériel A , c'est à dire un système matériel dont les dimensions sont suffisamment petites pour qu'on puisse l'assimiler à un point. A un instant T , en plus du point matériel A , sont présents un certain nombre de corps physiques $S_1, S_2, \dots S_n$ disjoints deux à deux et disjoints de A . Le principe suivant indique comment on peut schématiser mathématiquement les efforts exercés par chacun de ces corps sur A .

Principe. A chaque instant T , l'effort exercé par le corps physique S_i $(1 \leq i \leq n)$ sur le point matériel A , peut être schématisé par un vecteur $\vec{F}_i$, élément de l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{E}}_T$ (associé à l'espace affine $\mathcal{E}_T$, schématisant l'espace à l'instant T), appelé force exercée par S_i sur A . De plus, la force exercée par la réunion des corps S_i , supposés deux à deux disjoints, est la somme $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ des forces exercées par chacun de ces corps.

Remarques 1) En toute rigueur, la force $\vec{F}_i$ est un élément d'un espace vectoriel euclidien, distinct de $\vec{\mathcal{E}}_T$. C'est seulement après que l'on ait choisi une unité de force, qu'on peut identifier cet espace à $\vec{\mathcal{E}}_T$. On rencontre ici une circonstance analogue à celle déjà vue dans le chapitre 2 : la vitesse et l'accélération d'un point cinématique à l'instant T , relativement à un référentiel fixé, sont éléments des espaces vectoriel $\mathcal{L}(\vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{E}})$ et $\mathcal{L}(\vec{\mathcal{T}}, \mathcal{L}(\vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{E}}))$ respectivement, et c'est seulement moyennant le choix d'une unité de temps, qu'on peut identifier ces deux espaces vectoriels à $\vec{\mathcal{E}}$. On pourrait (en utilisant la notion de produit tensoriel de deux espaces vectoriels, qui n'est pas au programme) définir, de manière indépendante du choix d'une unité de force, l'espace vectoriel des forces. On se contentera de remarquer que si une force est, pour un choix donné de l'unité de force, représentée par le vecteur $\vec{F}$ de $\vec{\mathcal{E}}_T$, alors cette même force, si on prend une nouvelle unité de force égale à λ fois l'ancienne, est représentée par le vecteur $\frac{1}{\lambda} \vec{F}$.

2) La schématisation des efforts exercés sur A , est indépendante du choix d'un référentiel. Lorsqu'on a choisi un référentiel, les espaces affines $\mathcal{E}_T$ qui représentent l'espace physique à différents instants T , sont tous identifiés à un même espace affine euclidien de dimension 3 $\mathcal{E}$, et par conséquent, les espaces vectoriels associés, $\vec{\mathcal{E}}_T$, sont identifiés à $\vec{\mathcal{E}}$. Pour un choix donné de l'unité de force, la force exercée par chaque corps S_i sur A sera donc représentée par un vecteur $\vec{F}_i$, élément de $\vec{\mathcal{E}}$. Il peut être plus commode d'utiliser, pour représenter la force exercée par S_i sur A , non le vecteur $\vec{F}_i$ seul, mais le vecteur lié $(A_T, \vec{F}_i)$ où $A_T \in \mathcal{E}$ est le point représentant, dans le référentiel choisi, la position de A à l'instant T . On sait (Annexe au présent chapitre 3.A.3) que ce vecteur lié définit un torseur uniforce, qu'on peut, au même titre que le vecteur lié $(A_T, \vec{F}_i)$ utiliser pour représenter la force exercée par S_i sur A .

La somme des torseurs représentant les forces exercées sur A par tous les corps S_i , est encore un torseur uniforce, défini par le vecteur lié $(A_T , \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i)$, parce que les $\vec{F}_i$ sont tous liés au même point A_T .

On peut se demander si, dans des conditions plus générales, il n'y aurait pas lieu de représenter l'effort exercé par un corps S_i sur A par un torseur qui ne serait plus nécessairement uniforce. Ce serait le cas si le point matériel A possèdait des propriétés physiques plus riches que sa masse (par exemple un moment cinétique propre, correspondant à la propriété des particules élémentaires appelée "spin" par les physiciens). On reviendra sur ce sujet dans les cas d'un système matériel plus compliqué qu'un point matériel.

b) Cas de plusieurs points matériels. On suppose maintenant le système matériel A formé par un nombre fini de points matériels N_1 , N_2 , ... N_p . On veut décrire les efforts exercés sur A par un certain nombre d'autres corps physiques S_1 , S_2 , ... S_n , disjoints deux à deux et disjoints de A . Il ne suffit pas pour cela de décrire les efforts exercés par chaque corps S_i sur A entier car, pour étudier les mouvements relatifs des divers points qui constituent A , on doit pouvoir décrire aussi l'effort exercé par S_i sur chaque partie de A . On sait déjà (paragraphe a) ci-dessus) que l'effort exercé à l'instant T par S_i sur la partie de A constituée par un seul point matériel N_j , peut être représenté par un vecteur $\vec{F}_{ij}$; on a vu aussi, dans les Remarques, que cet effort pouvait aussi être représenté par le torseur uniforce τ_{ij} , défini par le vecteur lié $(N_j(T) , \vec{F}_{ij})$, où $N_j(T)$ est la position de N_j à l'instant T . On est tout naturellement amené au principe :

Principe. A chaque instant T , l'effort exercé par le corps physique S_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sur la partie de A constituée par la réunion $\{N_{j_1} , N_{j_2}, \dots N_{j_k}\}$ des k points matériels $N_{j_1}, \dots N_{j_k}$, est le torseur :

$$(3.4.1) \qquad \tau_{ij_1} + \tau_{ij_2} + \dots + \tau_{ij_k}$$

somme des torseurs uniforces représentant l'effort exercé par S_i sur chacun de ces points. De plus, l'effort exercé par la réunion des corps S_i sur $\{N_{j_1} , N_{j_2} , \dots N_{j_k}\}$ est la somme :

$$(3.4.2) \qquad \sum_{i=1}^{n} (\tau_{ij_1} + \dots + \tau_{ij_k})$$

des torseurs représentant l'effort exercé sur cet ensemble de points, par chacun des corps S_i .

<u>Remarque importante</u> L'effort exercé par S_i (et, de même, l'effort exercé par la réunion des S_i) sur $\{N_{j1}, \dots N_{jk}\}$, n'est plus, en général, un torseur uniforce. Si P est un point quelconque de $\mathcal{E}_T$, les éléments de réduction de ce torseur au point P sont (en supposant $\mathcal{E}_T$ orienté) :

$$(3.4.3) \begin{cases} \text{résultante générale :} & \vec{F}_{ij_1} + \dots + \vec{F}_{ij_k} \\ \text{moment au point } P : & \overrightarrow{PN_{j_1}(T)} \wedge \vec{F}_{ij_1} + \dots + \overrightarrow{PN_{j_k}(T)} \wedge \vec{F}_{ij_k} \end{cases}$$

c) <u>Cas général</u>. On considère maintenant un système matériel A , non nécessairement réunion d'un nombre fini de points matériels, et on suppose, comme dans le paragraphe 3.3 , que toutes ses parties mesurables sont aussi des systèmes matériels. Comme ci-dessus, on doit décrire l'effort exercé par un corps physique S_i non seulement sur A entier, mais sur chaque partie mesurable B de A . En généralisant de manière naturelle le cas d'un nombre fini de point matériels, on est conduit à admettre les faits suivants :

- à chaque instant T , l'effort exercé par S_i sur une partie mesurable B de A occupant à l'instant T la position B_T ,est un <u>torseur</u> $\mathcal{T}_i(B_T)$ sur l'espace $\mathcal{E}_T$.

- si B_{1T} et B_{2T} sont les positions, à l'instant T , de deux parties mesurables disjointes B_1 et B_2 de A , l'effort $\mathcal{T}_i\,(B_{1T} \cup B_{2T})$ exercé à l'instant T par S_i sur la partie de A réunion de B_1 et de B_2 est

$$(3.4.4) \qquad \mathcal{T}_i\,(B_{1T} \cup B_{2T}) = \mathcal{T}_i\,(B_{1T}) + \mathcal{T}_i\,(B_{2T})$$

On voit que la situation est tout à fait analogue à celle rencontrée dans le paragraphe 3.3 , la propriété (3.4.4) ci-dessus étant l'analogue de la propriété d'additivité de la masse. De même qu'on a utilisé, pour décrire la répartition des masses de A , une mesure positive sur A_T , on est amené à décrire la répartition des efforts exercés par S_i sur A à l'instant T , au moyen d'une mesure sur A_T , à valeurs dans l'espace $\mathcal{G}'$ des torseurs sur $\mathcal{E}_T$. Par définition, une telle mesure, est une application qui, à toute partie mesurable B_T de A_T , fait correspondre un torseur $\mathcal{T}_i\,(B_T) \in \mathcal{G}'$, qui vérifie (3.4.4) si B_{1T} et B_{2T} sont des parties mesurables disjointes de A_T , et même plus généralement :

$$(3.4.5) \qquad \mathcal{T}_i\,\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_{jT}\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{T}_i\,(B_{jT})$$

si les B_{jT} forment une famille dénombrable de parties mesurables deux à deux

On pose comme principe :

Principe A chaque instant T , l'effort exercé par le corps physique S_i sur les diverses parties de A , est décrit par une mesure $\mathcal{T}_i$ sur la position A_T de A à l'instant T , à valeurs dans l'espace vectoriel $\mathcal{G}'$ des torseurs sur l'espace affine euclidien $\mathcal{E}_T$. Pour toute partie mesurable B_T de A_T , l'effort exercé par S_i sur la partie B de A qui occupe à l'instant T la position B_T , est le torseur $\mathcal{T}_i\,(B_T)$. En particulier l'effort exercé par S_i sur A entier, est $\mathcal{T}_i\,(A_T)$. Enfin, l'effort exercé par la réunion des corps S_i (supposés deux à deux disjoints , $1 \leqslant i \leqslant n$) sur A est la mesure somme $\sum_{i=1}^{n} \mathcal{T}_i$ des mesures représentant les efforts exercés sur A par chacun des S_i .

Remarque 1 Comme dans le cas a) , ce n'est que moyennant le choix d'une unité de force que l'on peut considérer les efforts comme représentés par des torseurs sur $\mathcal{E}_T$. Si on prend une autre unité de force égale à λ fois l'ancienne, les mesures $\mathcal{T}_i$, à valeurs dans l'espace des torseurs et représentant les efforts exercés sur A par les corps S_i , sont à remplacer par $\frac{1}{\lambda}\,\mathcal{T}_i$.

Remarque 2 On s'attachera surtout à bien comprendre les exemples particuliers a) et b) , ainsi que ceux donnés dans le paragraphe 3.6 ci-après, plutôt qu'à approfondir les propriétés générales des mesures, qui ne sont pas au programme de ce cours.

Suite du chapitre III

NOTIONS DE DYNAMIQUE

3 . 5 . Le principe fondamental de la dynamique.

Considérons un système matériel A dont, comme en 3 . 3 . , toute partie mesurable est un système matériel, et n corps S_i deux à deux disjoints et disjoints de A . $\mathcal{T}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ désigne la mesure, à valeurs dans l'espace des torseurs, qui représente les efforts exercés par S_i à l'instant T sur les diverses parties de A ; en particulier, le torseur $\mathcal{T}_i\,(A_T)$ désigne l'effort exercé par S_i sur A entier. C'est un torseur sur l'espace affine euclidien $\mathcal{E}_T$, qui représente l'espace physique à l'instant T : il est bien défini, indépendamment de tout choix d'un référentiel de l'espace - temps. Ainsi qu'on l'a vu dans la remarque 1 en fin du paragraphe précédent, cela suppose qu'on a choisi une unité de force.

Supposons choisi un référentiel $\mathcal{R}$ de l'espace - temps, de domaine de temps $]\,T_1\,,\,T_2\,[$, ainsi qu'une origine $O_{\mathcal{T}}$ et une unité $\vec{e}_0$ du temps $\mathcal{T}$. Chaque instant $T \in\,]\,T_1\,,\,T_2\,[$ sera désormais représenté par sa date $t \in\,]\,t_1\,,\,t_2\,[$.