

Dynamique des systèmes à un nombre fini

de degrés de liberté.

6 . 1 . Description générale des systèmes étudiés

On étudie dans ce chapitre la dynamique des systèmes matériels constitués par un nombre fini de corps rigides  $A_1, A_2, \dots, A_k$ . Chacun de ces corps  $A_i$  est supposé borné, et on ne fait pas pour le moment d'hypothèse restrictive sur sa forme : ce corps pourra être un volume limité par une surface plus ou moins régulière, ou bien un morceau de surface (schématisant une plaque dont on néglige l'épaisseur), un morceau de courbe (schématisant une poutre, ou une tige, etc ...), ou même un point matériel (schématisant un corps de dimensions négligeables).

Les corps  $A_i$  pourront, soit être libres de se mouvoir les uns par rapport aux autres de manière quelconque, soit être astreints à respecter certaines dispositions : ainsi, par exemple, deux corps peuvent être articulés l'un sur l'autre ; une roue peut-être astreinte à rouler sans glisser sur une surface. On dit alors que ces corps sont soumis à des liaisons. On distingue, en général, les liaisons géométriques, qui imposent des restrictions aux positions possibles des corps, et les liaisons cinématiques, qui imposent des restrictions aux champs de vitesses de ces corps. Ainsi par exemple, imposer à un corps solide convexe d'avoir avec un autre corps solide convexe un contact ponctuel, est une liaison géométrique ; imposer de plus à ces deux corps de rouler l'un sur l'autre sans glisser, est une liaison cinématique. Quelques exemples de liaisons géométriques et cinématiques seront examinés dans les paragraphes 6.2 et 6.3 .

Lors de l'étude d'un système de corps solides soumis à des liaisons, on doit tout d'abord examiner le problème de la description de la position, à un instant donné, de ce système (au moyen de paramètres de position convenablement choisis), puis celui de la description des mouvements possibles de ce système, compte tenu de l'existence éventuelle de liaisons cinématiques. Ces problèmes seront brièvement examinés paragraphe 6.4 .

Les corps qui constituent le système sont soumis à des efforts, exercés sur eux par d'autres corps extérieurs au système (efforts dits extérieurs), ou qu'ils exercent les uns sur les autres (efforts intérieurs). On distingue en général les efforts à distance, et les efforts de liaison.

Les efforts à distance rendent compte de phénomènes physiques tels que l'attraction gravitationnelle, l'action d'un champ électrique sur un corps électriquement chargé, ou celle d'un champ magnétique sur un corps électriquement chargé et en mouvement. Dans la plupart des problèmes rencontrés, on peut considérer ces efforts comme des fonctions connues des positions et des champs de vitesses, à l'instant considéré, des corps constituant le système, et éventuellement du temps.

Les efforts de liaison rendent compte des phénomènes physiques qui ont lieu au contact de deux corps rigides liés entre eux (par exemple par une articulation). Ce sont eux qui obligent le système à respecter au cours de son mouvement les liaisons imposées. En général la connaissance des positions et des champs de vitesses des éléments du système, ne suffit pas pour évaluer ces efforts. En effet les lois physiques qui les régissent ne permettent pas, connaissant ces données, de les déterminer complètement. Elles fournissent toutefois certains renseignements partiels, comme on le verra dans des exemples.

L'étude de la dynamique du système considéré consiste enfin à écrire et à résoudre les équations traduisant l'application du principe de la dynamique (ou de ses conséquences) soit au système entier, soit à certaines parties de ce système (par exemple l'un des corps  $A_i$ ). Ces équations expriment en général des égalités entre des fonctions de la position, des champs de vitesse et d'accélération, à un instant donné, des corps constituant le système (les torseurs dynamiques de ces corps) et les efforts exercés sur eux à ce même instant. Lorsque ceux-ci sont des fonctions connues de la position des corps et, éventuellement, de leurs champs de vitesses, on obtient ainsi un système d'équations différentielles du second ordre qui, s'il est bien posé (et notamment s'il comporte autant d'équations indépendantes qu'il y a de paramètres de position inconnus) permet en principe la détermination du mouvement du système. C'est le cas, par exemple, lorsque tous les corps constituant le système sont libres (sans aucune liaison) et que les efforts à distance sont des fonctions connues des positions et des champs de vitesse. Malheureusement, il n'en est pas en général de même lorsque des liaisons existent : les efforts de liaison étant en général inconnus, le nombre d'équations indépendantes est alors inférieur au nombre des inconnues du problème. Afin de pouvoir résoudre quand même le problème, on doit ajouter aux systèmes un certain nombre d'équations exprimant certaines propriétés des efforts de liaison, résultant de l'expérience (par exemple, les lois du frottement). Il y a toutefois un cas où il est possible d'obtenir un système d'équations bien posé pour la détermination du mouvement du système : c'est celui où les liaisons sont supposées parfaites. Cette notion, déjà rencontrée dans le chapitre précédent, sera étudiée plus à fond dans le paragraphe 6.5. Quelques notions sommaires sur les liaisons non parfaites seront données paragraphe 6.6.

Il faut encore signaler que dans la pratique on peut soit avoir à calculer le mouvement du système au cours du temps, connaissant les lois donnant les efforts en fonction des positions des corps constituant ce système, soit au contraire avoir à déterminer ces lois, connaissant le mouvement du système (exemples : détermination de l'accélération de la pesanteur, connaissant le mouvement d'un pendule ; détermination des masses de diverses planètes, d'après l'observation de leur mouvement).

## 6.2. Quelques exemples de liaisons géométriques.

Dans tout ce paragraphe on suppose choisi un référentiel, et on examine la position des corps  $A_i$  constituant le système à un instant donné. Chaque  $A_i$  est alors une partie de l'espace affine euclidien  $\mathcal{E}$ .

### 6.2.1 Point matériel assujéti à rester sur une surface.

On rencontre ce cas très fréquemment en pratique. Un corps  $A$  de dimensions négligeables (donc considéré comme un point matériel) est astreint à rester sur une surface  $S$ , schématisant la limite d'un autre corps matériel

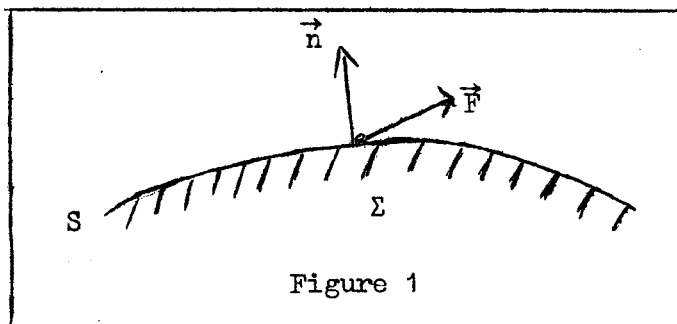


Figure 1

rigide  $\Sigma$ . La position de  $A$  peut être repérée par deux paramètres (par exemple, des coordonnées curvilignes convenables choisies sur  $S$ ).

L'effort de liaison exercé par  $S$  sur  $A$  est un torseur uniforce  $(A, \vec{F})$ . On rencontre en pratique des cas où la liaison est bilatérale,

c'est à dire où  $A$  est astreint à rester sur  $S$  quoi qu'il arrive, et d'autres où elle est unilatérale, c'est à dire où  $A$  est libre de quitter  $S$  en allant d'un côté de cette surface (le côté de l'extérieur de  $\Sigma$ ). Lorsque la liaison est bilatérale, la projection de  $\vec{F}$  sur la normale à  $S$  au point  $A$ , peut être de sens quelconque. Lorsque cette liaison est unilatérale, elle est nécessairement dirigée du côté de  $S$  vers lequel  $A$  est libre de se déplacer :

$$\vec{F} \cdot \vec{n} \geq 0, \quad \vec{n} \text{ normal à } S \text{ dirigé vers l'extérieur de } \Sigma$$

### 6.2.2 Point matériel assujéti à rester sur une courbe.

Ce cas est assez analogue au précédent. La courbe  $C$  peut par exemple être matériellement réalisée par une tige de section négligeable, et le corps  $A$  par un anneau de dimensions négligeables enfilé sur cette tige et libre de coulisser. La position de  $A$  peut alors être reprérée par un paramètre (par exemple l'abscisse curviligne sur  $C$ , une fois une origine et un sens choisis sur cette courbe).

L'effort de liaison exercé sur  $A$  est (comme c'est toujours le cas dans le cas d'un point matériel) un torseur uniforce  $(A, \vec{F})$ .

### 6.2.3 Corps rigides en contact par une partie de leur surface.

Considérons deux corps rigides  $A_1$  et  $A_2$  en contact par une partie  $\Sigma$  de leur surface (qui éventuellement, peut être réduite à un nombre fini de points). Comme dans le cas du point matériel assujetti à rester sur une surface, on peut en pratique rencontrer des cas où la liaison est bilatérale ou unilatérale ; dans ce dernier cas les deux corps peuvent au cours de leur mouvement, cesser d'être en contact, et sont seulement astreints à ne pas s'interpénétrer.

Le choix de paramètres pour décrire la position des deux corps en contact est difficile dans le cas général, et on n'étudiera ce problème que dans quelques cas particuliers.

#### a) Cas où la surface de contact est plane.

Dans ce cas, une fois la position d'un des deux corps  $A_1$  fixée, la position de l'autre corps  $A_2$  est déterminée par trois paramètres (par exemple, la position d'un point de  $A_2$  situé sur la surface de contact, et l'angle que fait un vecteur lié à  $A_2$  parallèle au plan de contact, avec un autre vecteur lié à  $A_1$  et parallèle à ce même plan). L'effort exercé par  $A_1$  sur  $A_2$  est

le plus souvent schématisé par un champ de vecteurs forces défini sur la surface de contact  $\Sigma$  (voir chapitre III, paragraphe 3.6).

Lorsque la liaison est unilatérale ces vecteurs sont astreints à être dirigés vers l'extérieur de  $A_1$ .

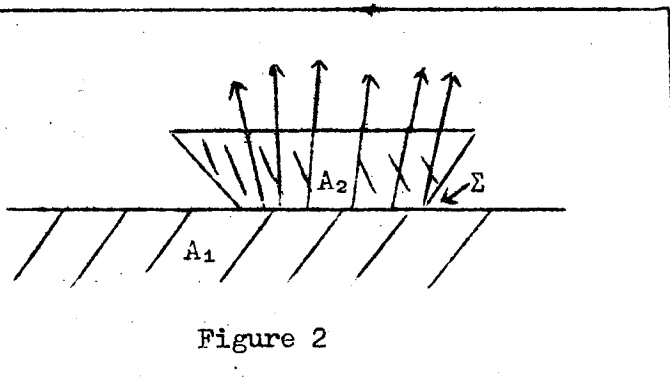


Figure 2

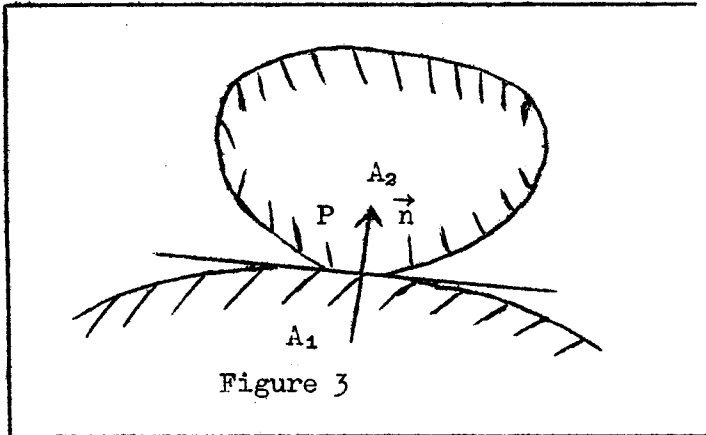
On rencontre encore des cas assez analogues où la position de  $A_2$ , une fois celle de  $A_1$  fixée, dépend de trois, deux ou un seul paramètres :

- cas où la surface de contact est sphérique (3 paramètres);
- cas où cette surface est un cylindre de révolution (2 paramètres)
- cas où c'est un cylindre à base quelconque,  $A_2$  pouvant coulisser relativement à  $A_1$  (1 paramètre)
- cas où c'est une surface de révolution quelconque,  $A_2$  pouvant tourner relativement à  $A_1$  (1 paramètre).

Des exemples de ces situations sont fournis par les articulations étudiées ci-après.

b) Contact ponctuel.

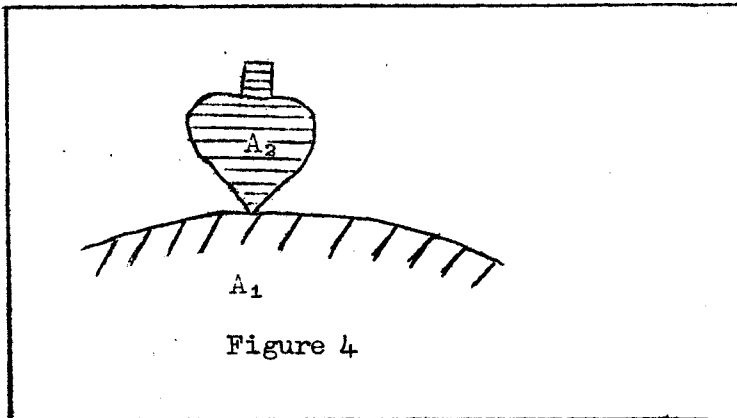
Supposons les deux corps  $A_1$  et  $A_2$  connexes et limités par une surface régulière (c'est à dire ayant en tout point un plan tangent). Les deux corps sont en contact, en un point  $P$ . Le plan tangent au point  $P$  aux surfaces limitant les deux corps est le même. On voit que la position de  $A_2$ , une fois celle de  $A_1$  fixée, est déterminée par 5 paramètres : deux pour déterminer la position du point  $P$  relativement à  $A_1$ , deux pour déterminer la position de ce point relativement à  $A_2$  et un pour déterminer l'orientation de  $A_2$  (encore libre de tourner autour de la normale commune, une fois  $P$  fixé relativement aux deux corps).



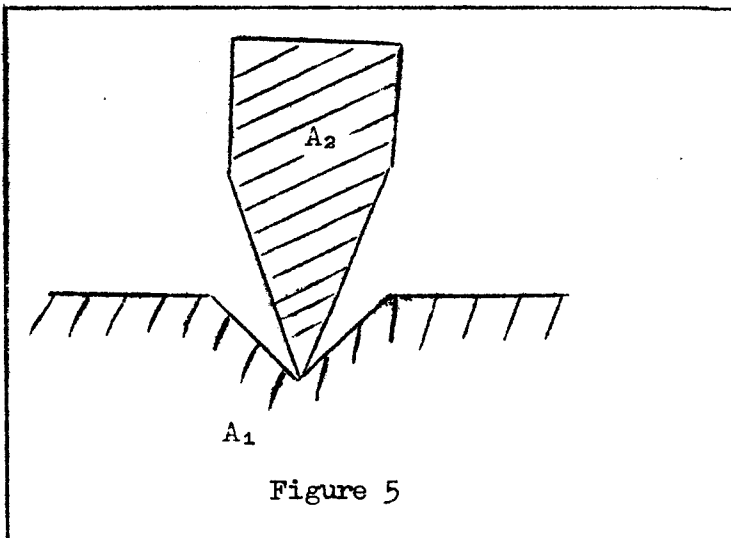
tourner autour de la normale commune, une fois  $P$  fixé relativement aux deux corps).

L'effort exercé par  $A_1$  sur  $A_2$  est schématisé par un torseur qui (lorsqu'on ne néglige pas le frottement) n'est pas nécessairement uniforce. On reviendra sur ce point dans le paragraphe 6.6.

On rencontre d'autres exemples de contact ponctuel, dans lesquels le point



de contact est fixé, soit relativement à un des deux corps (cas où  $A_2$  comporte une pointe reposant sur la surface de  $A_1$ ) ou relativement aux deux corps (cas où  $A_2$  présente une pointe et  $A_1$  un creux conique). Une fois la position de  $A_1$  fixée, celle de  $A_2$  est déterminée, dans chacun de ces cas, par cinq et trois paramètres respectivement.



c) Articulation rotoïde

$A_1$  et  $A_2$  sont en contact par une surface de révolution quelconque,

de sorte que  $A_2$  peut uniquement tourner relativement à  $A_1$  autour de l'axe de révolution. Une fois la position de  $A_1$  fixée, celle de  $A_2$  dépend donc d'un seul paramètre. On remarquera que tous les points de l'axe de révolution sont cinématiquement liés à la fois aux deux corps.

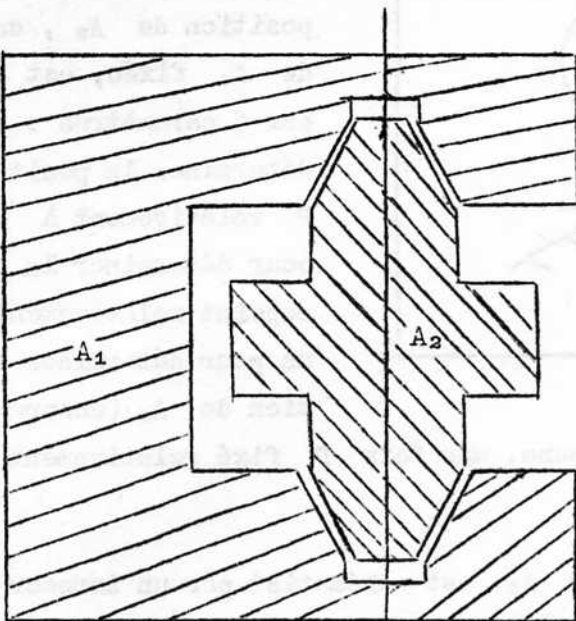


Figure 6

d) Articulation sphérique

$A_1$  et  $A_2$  sont en contact par une surface sphérique.

On remarquera que le centre  $O$  de la sphère est cinématiquement lié à la fois aux deux corps. Une fois la position de  $A_1$  fixée, celle de  $A_2$  dépend de trois paramètres (voir chapitre 2, paragraphe concernant le mouvement d'un solide ayant un point fixe : angles d'Euler). Un résultat analogue est obtenu grâce au contact ponctuel représenté sur la figure 5.

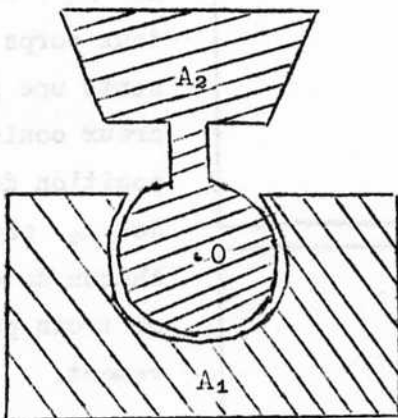
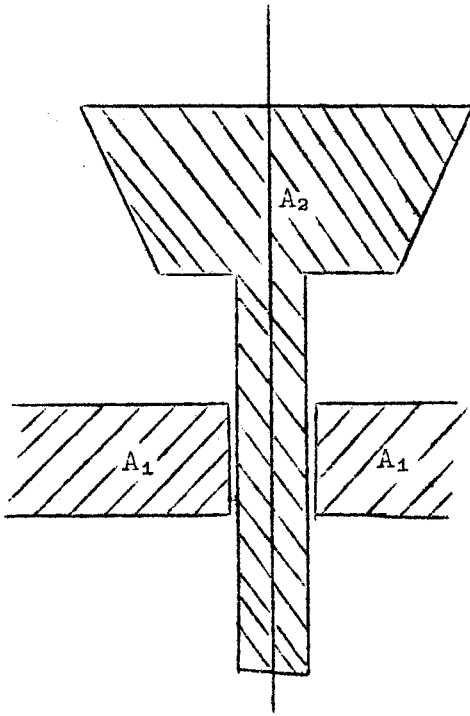


Figure 7

e) Articulation verrou

$A_1$  et  $A_2$  sont en contact par une surface cylindrique de révolution. Lorsque la position de  $A_1$  est fixée, celle de  $A_2$  dépend de deux paramètres (car  $A_2$  peut à la fois tourner et coulisser le long de l'axe de révolution).

Figure 8

6.3. Exemple de liaison cinématique : roulement sans glissement.

Revenons à l'exemple de deux corps convexes  $A_1$  et  $A_2$  limités par une surface régulière, en contact ponctuel à l'instant  $t$  au point  $P$ . Soit  $\mathcal{R}$  un référentiel arbitraire. Soit  $M_1$  le point cinématiquement lié à  $A_1$  et  $M_2$  le point cinématiquement lié à  $A_2$  qui, à l'instant considéré  $t$ , coïncident avec  $P$ . Soient, respectivement  $\vec{V}_1(t)$  et  $\vec{V}_2(t)$  les vitesses, respectivement de  $M_1$  et de  $M_2$ , relativement au référentiel  $\mathcal{R}$ . On suppose qu'au cours de leur mouvement, les deux corps  $A_1$  et  $A_2$  restent en contact (le point de contact pouvant toutefois se déplacer, à la fois relativement à chacun des deux corps).

Définition. On appelle vitesse de glissement de  $A_2$  relativement à  $A_1$ , à l'instant  $t$ , le vecteur :

$$\vec{V}_{2-1}(t) = \vec{V}_2(t) - \vec{V}_1(t)$$

Remarques. 1°) La vitesse de glissement  $\vec{V}_{2-1}(t)$  ne dépend pas du choix du référentiel  $\mathcal{R}$ . Cela résulte en effet de la loi de composition des vitesses. En particulier, on peut prendre  $\mathcal{R}$  cinématiquement lié à  $A_1$  et on voit que  $\vec{V}_{2-1}$  est la vitesse de  $M_2$  relativement à ce repère.

2°) On a évidemment

$$\vec{V}_{12}(t) = -\vec{V}_{21}(t)$$

3°) On montre, par des considérations purement géométriques, que la vitesse de glissement  $\vec{V}_{21}(t)$  est parallèle au plan tangent au point de contact  $P$  à l'instant considéré. Cette propriété résulte en effet de l'hypothèse de persistance du contact entre les deux corps au cours de leur mouvement.

Définition. On dit que les deux corps  $A_1$  et  $A_2$  (supposés en contact ponctuel pendant toute la durée de leur mouvement) roulent sans glisser l'un sur l'autre, si à tout instant la vitesse de glissement de  $A_2$  relativement à  $A_1$  (ou, ce qui revient au même, celle de  $A_1$  relativement à  $A_2$ ) est nulle.

Remarques. 1°) Lorsque  $A_1$  et  $A_2$  roulent sans glisser l'un sur l'autre, la vitesse du point  $M_2$  (cinématiquement lié à  $A_2$  et coïncidant à l'instant  $t$  avec le point de contact) relativement au référentiel lié à  $A_2$ , est nulle. Par conséquent, le champ de vecteurs vitesse du corps  $A_2$  relativement à  $A_1$  (équiprojectif, puisque  $A_2$  est rigide) est une rotation infinitésimale, dont l'axe instantané  $\Delta(t)$  passe par le point de contact  $P$ . On dit que le mouvement relatif de  $A_2$  (par rapport à  $A_1$ ) est, à l'instant  $t$ , un mouvement de roulement pur si  $\Delta(t)$  est contenu dans le plan tangent en  $P$  aux deux corps. C'est un mouvement de pivotement pur si cet axe est au contraire normal au plan tangent.

2°) On étudierait de même le roulement sans glissement d'un cylindre sur un plan, d'un cône sur un plan, ou encore d'un cylindre sur un autre cylindre d'axe parallèle, d'un cône sur un autre cône de même sommet. Dans tous ces cas, le contact a lieu le long d'une génératrice et tous les points cinématiquement liés à l'un des corps  $A_2$  qui, à l'instant considéré  $t$ , coïncident avec un point de contact, ont relativement à l'autre solide  $A_1$ , une vitesse nulle à cet instant. Par conséquent le champ des vitesses de  $A_2$  relativement à  $A_1$  à cet instant est une rotation infinitésimale dont l'axe est la génératrice de contact.

#### 4. Le paramétrage d'un système de corps rigides soumis à des liaisons.

Les hypothèses sont les mêmes que dans le paragraphe 6.2. Afin d'étudier le système considéré, on doit tout d'abord choisir des paramètres permettant de déterminer, relativement au référentiel choisi, les positions de tous les corps rigides qui le constituent, compte tenu de l'existence des liaisons de ces corps entre eux et avec d'autres corps extérieurs.



On va pour commencer, ne tenir compte que des liaisons géométriques, en les supposant toutes bilatérales. On donnera ensuite quelques brèves indications sur le traitement des liaisons unilatérales, puis des liaisons cinématiques.

#### 6 . 4 . 1 . Cas d'un corps rigide libre.

Le système considéré est constitué d'un corps rigide unique  $A$  libre (c'est à dire qui n'est soumis à aucune liaison). Afin de déterminer la position de  $A$  relativement au référentiel choisi, on peut procéder de la manière suivante. On choisit un repère orthonormé fixe (relativement au référentiel choisi)  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  et un autre repère orthonormé, de même orientation, cinématiquement lié à  $A$ ,  $(M, \vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3)$ . Afin d'alléger l'écriture, on ne mentionne pas dans les notations, le fait que le point  $M$ , ainsi que les vecteurs  $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3$ , dépendent du temps  $t$ . On voit alors que déterminer la position de  $A$ , équivaut à déterminer le changement de repère, permettant de passer du repère  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , au repère  $(M, \vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3)$ . Pour cela, on peut se donner :

- les coordonnées  $(A_1, A_2, A_3)$  du point  $M$ , dans le repère  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

- la matrice orthogonale  $(B_{ij})$  ( $1 \leq i, j \leq 3$ ) de changement de base, dont la  $j^{\text{ème}}$  colonne est constituée par les composantes de  $\vec{\varepsilon}_j$  dans la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ .

On a alors :

$$(6.4.1) \quad \vec{OM} = A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 + A_3 \vec{e}_3$$

$$(6.4.2) \quad B_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{\varepsilon}_j$$

On rappelle que les 9 coefficients de la matrice  $(B_{ij})$  ne sont pas indépendants. Cette matrice dépend en fait seulement de trois paramètres. On a vu (chapitre II, paragraphe 2 . 8 . D) qu'on pouvait par exemple choisir pour paramètres les trois angles d'Euler  $\psi, \theta$  et  $\varphi$ . On voit donc que l'ensemble des positions de  $A$ , relativement au référentiel  $\mathcal{R}$ , appelé espace de configuration du système, est paramétré par six paramètres indépendants, par exemple  $A_1, A_2, A_3, \psi, \theta$  et  $\varphi$ . On dit que cet ensemble est une variété différentielle de dimension 6. Du point de vue géométrique, il est isomorphe à  $\mathbb{R}^3 \times S O(3)$  (les trois coordonnées de  $M, A_1, A_2$  et  $A_3$ , définissant un point de  $\mathbb{R}^3$ , et les trois angles d'Euler un élément du groupe des rotations  $S O(3)$ ).

Remarques importantes. 1°) Pour une position donnée du corps  $A$ , on peut changer les choix des repères  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  lié au référentiel choisi et  $(M, \vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3)$  lié à  $A$ .

En conséquence, les paramètres  $A_1, A_2, A_3, \psi, \theta$  et  $\varphi$  servant à repérer la position de  $A$ , se trouveront modifiés. On dit qu'on a effectué un changement de carte sur l'espace de configuration du système.

2°) D'ailleurs, même sans modifier le choix des repères  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  et  $(M, \vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3)$ , la définition des angles d'Euler n'est pas déterminée de manière unique, et choisir un des systèmes possibles d'angles d'Euler, revient à choisir une carte de l'espace de configuration. Ainsi, on peut remplacer le vecteur  $\vec{u}$  (voir chapitre III, paragraphe 2.8.d) qui sert à définir l'angle de précession  $\psi = (\vec{e}_1, \vec{u})$ , par son opposé ;  $\psi$  est alors remplacé par  $\psi + \pi$  ; l'angle de nutation  $\theta$  est remplacé par  $-\theta$  (car  $\vec{u}$  détermine l'orientation du plan dans lequel est mesuré l'angle  $\theta$ ), et l'angle de rotation propre  $\varphi$  par  $\varphi + \pi$ . D'autre part, les angles d'Euler sont évidemment définis modulo  $2\pi$ .

3°) Les systèmes possibles d'angles d'Euler correspondant à une position donnée du corps  $A$ , sont, en général, discrets. Cela signifie que lorsqu'un de ces systèmes est choisi on peut, pour les positions de  $A$  "voisines" d'une position donnée, suivre de manière continue la variation des angles d'Euler. Toutefois, pour certaines positions du corps  $A$ , il n'en est plus de même. Ainsi par exemple, lorsque  $\vec{e}_3$  et  $\vec{\varepsilon}_3$  sont confondus,  $\vec{u}$  est indéterminé dans le plan  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ , de sorte que les deux angles  $\psi$  et  $\varphi$  sont arbitraires, seule leur somme ayant une signification intrinsèque. On voit ainsi qu'on ne peut pas choisir un système unique de six paramètres scalaires pour représenter toutes les positions possibles du corps  $A$ , de telle manière que l'ensemble des valeurs de ce système de six paramètres soit en bijection avec l'ensemble des positions de  $A$ , et que ces paramètres varient de manière continue lorsque la position de  $A$  varie de manière continue. On dit que plusieurs cartes sont nécessaires, pour représenter l'espace de configuration. Toutefois pour toute position du corps  $A$ , on peut trouver une carte (c'est à dire un système de paramètres) utilisable pour cette position, et toutes les positions suffisamment "voisines".

#### 6.4.2. Cas d'un système soumis à des liaisons géométriques bilatérales. Notion d'espace de configuration.

Considérons maintenant le cas d'un système de  $k$  corps rigides  $A_1, A_2, \dots, A_k$ , soumis à des liaisons géométriques bilatérales soit entre eux, soit avec d'autres corps extérieurs au système (ces derniers pouvant être fixes ou mobiles au cours du temps, leur mouvement étant alors considéré comme donné).

Ainsi qu'on l'a vu ci-dessus on peut, pour repérer la position de chacun des corps  $A_i$ , choisir 6 paramètres, de telle sorte que pour les positions de  $A_i$  voisines d'une position donnée, il y ait une correspondance bijective et bicontinue entre les positions de  $A_i$  et les valeurs possibles de ces 6 paramètres. D'où une famille de 6 k paramètres  $q_1, q_2, \dots, q_{6k}$ , dont l'ensemble des valeurs est en bijection avec l'ensemble des positions du système suffisamment voisines d'une position donnée.

La position d'un point  $M$  quelconque du système, pourra s'exprimer au moyen des paramètres  $q_i$ , sous la forme :

6.4.3)

$$M = M(q_1, q_2, \dots, q_{6k}, t)$$

On remarque que, dans cette expression, le temps  $t$  peut intervenir explicitement. Lorsque c'est le cas (au moins pour les points  $M$  appartenant à l'un des corps rigides constituant le système) on dit que le paramétrage choisi dépend du temps. Dans le cas contraire on dit que ce paramétrage est indépendant du temps.

Il est facile de donner des exemples simples de cas où le choix d'un paramétrage dépendant du temps est naturel : pour un système situé dans un véhicule en mouvement (un navire par exemple) et dont le mouvement est connu en fonction du temps, il peut-être préférable de choisir un paramétrage tel qu'à des valeurs fixées des  $q_i$ , corresponde une position du système fixée relativement au véhicule, mais non relativement au référentiel  $\mathcal{R}$  dans lequel on étudie le mouvement. Dans ce cas,  $t$  interviendra explicitement dans le second membre des expressions 6.4.3.

L'existence de liaisons géométriques bilatérales se traduit par un certain nombre  $\ell$  de relations que doivent vérifier les paramètres  $q_i$ , de la forme :

(6.4.4)

$$F_p(q_1, q_2, \dots, q_{6k}, t) = 0 \quad (1 \leq p \leq \ell)$$

On remarque que le temps  $t$  peut intervenir explicitement dans ces relations (tout comme dans les relations (6.4.3)). Cela est naturel, si certains des corps  $A_i$  sont soumis à des liaisons avec des corps extérieurs au système, mobiles au cours du temps. On dira que les liaisons sont indépendantes du temps si, lorsque le paramétrage choisi est lui-même indépendant du temps,  $t$  n'intervient pas explicitement dans les relations (6.4.4).

Dans la plupart des exemples rencontrés en pratique, les fonctions  $F_p$  sont différentiables, et le système (6.4.3) est, pour chaque  $t$  fixé, de rang égal à  $\ell$ . Cela signifie que la matrice rectangulaire à  $\ell$  lignes et 6 k colonnes :

$$\left( \frac{\partial F_p}{\partial q_i} (q_1, \dots, q_{6k}, t) \right)$$

est de rang  $\ell$  (dans le domaine considéré de variation des paramètres  $q_i$  et du temps). En modifiant si nécessaire l'ordre de numérotation des  $q_i$ , on peut supposer non nul le déterminant de la matrice constituée par les  $\ell$  dernières colonnes de la précédente ( $6k - \ell + 1 \leq i \leq 6k$ ). Un important théorème de Calcul différentiel (le théorème des fonctions implicites) montre alors qu'on peut, dans le domaine considéré, choisir librement les valeurs des  $6k - \ell$  premiers paramètres  $q_i$  ( $1 \leq i \leq 6k - \ell$ ), les  $\ell$  autres étant alors déterminés en fonction des précédents et du temps par les relations (6.4.3).

On voit alors que la position du système (au moins pour les positions voisines d'une position particulière choisie d'avance) peut, à un instant  $t$  fixé, être déterminée par la donnée de  $6k - \ell$  paramètres  $q_i$ . On appelle espace de configuration du système à l'instant  $t$ , l'ensemble des positions du système respectant les liaisons géométriques bilatérales imposées à cet instant. Le résultat précédent s'exprime en disant que cet espace de configuration (à l'instant  $t$ ) est une variété différentielle de dimension  $6k - \ell$ .

Le choix des paramètres  $q_i$  peut, en général, être fait d'une infinité de façons. Chacun de ces choix établit une bijection entre une partie de l'espace de configuration et une partie ouverte de  $\mathbb{R}^{6k - \ell}$ , qu'on appelle une carte de l'espace de configuration. En général, plusieurs cartes sont nécessaires pour recouvrir la totalité de l'espace de configuration (les domaines de ces cartes pouvant bien entendu, se "chevaucher").

Le concept d'espace de configuration peut paraître un peu abstrait. Toutefois, il est dans la pratique très important. Il faut surtout bien comprendre que l'espace de configuration d'un système à un instant donné est un être géométrique qui possède une signification intrinsèque, indépendamment du choix des paramètres  $q_i$  (c'est à dire des cartes) retenu pour le décrire. On doit considérer que ces paramètres  $q_i$  sont des "coordonnées locales" permettant de repérer les points de l'espace de configuration, exactement comme les coordonnées cartésiennes permettent de repérer la position d'un point dans un espace affine (une fois un repère affine choisi). Mais alors que, pour un espace affine, il suffit d'une seule carte pour couvrir tout l'espace, plusieurs cartes sont nécessaires dans le cas général d'une variété différentielle quelconque.

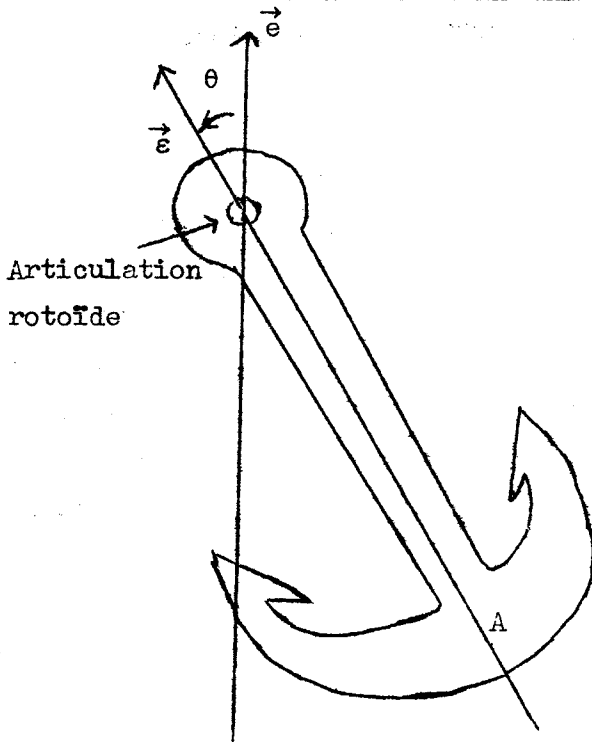
### 6.4.3. Exemples.

#### a) Corps solide ayant un point fixe.

Le système étudié est constitué d'un corps solide unique  $A$ , lié à un bâti fixe (par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  considéré) par une articulation sphérique.

Le centre de cette sphère est donc un point de  $A$  fixe dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . Comme on l'a vu dans le chapitre II, la position de  $A$  peut être repérée par trois paramètres, par exemples des angles d'Euler pour un choix convenable de repères. L'espace de configuration est le groupe  $SO(3)$ .

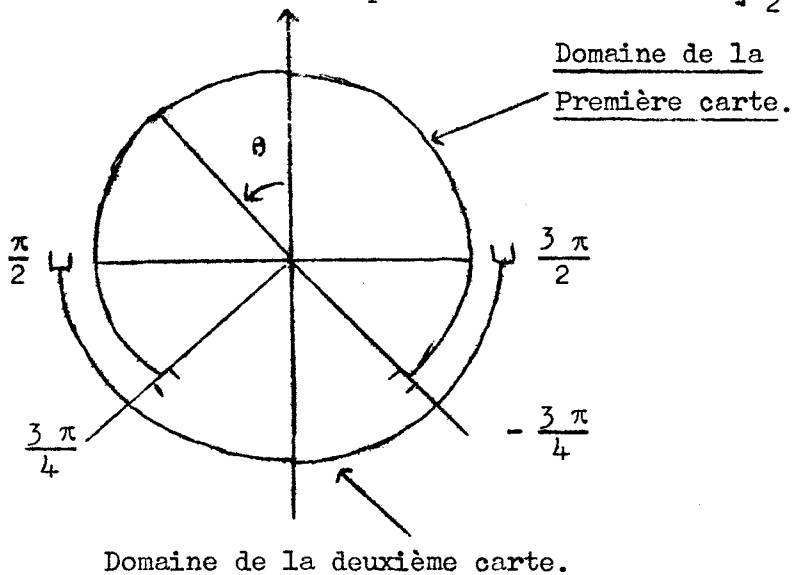
b) Corps solide lié à un bâti par une articulation rotoïde.



Supposons choisie une orientation de l'axe de la liaison rotoïde (perpendiculaire au plan de la figure), et considérons deux vecteurs unitaires normaux à cet axe, l'un  $\vec{e}$  fixe dans le référentiel  $\mathcal{R}$  considéré, l'autre  $\vec{e}$  lié au corps solide  $A$ . La position de  $A$  est déterminée par la donnée de l'angle orienté  $\theta = (\vec{e}, \vec{e})$ .

Dans cet exemple, l'espace de configuration est de dimension 1, et il est facile de l'identifier avec le cercle trigonométrique  $S^1$  (la position de  $A$  étant représentée par le point d'argument  $\theta$  du cercle trigonométrique). On voit que deux cartes au moins sont nécessaires pour couvrir la totalité de l'espace de configuration, par exemple :

- une carte pour  $\theta$  variant dans l'intervalle  $]-\frac{3\pi}{4}, +\frac{3\pi}{4}[$
- une carte pour  $\theta$  variant dans  $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ .

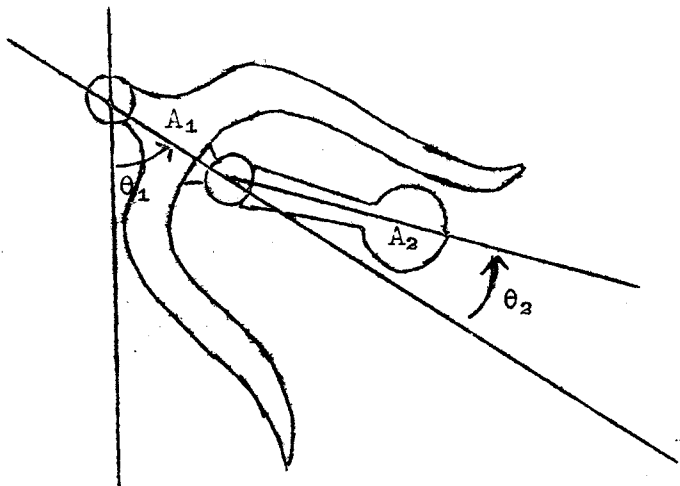


On pourrait penser qu'en faisant varier  $\theta$  dans  $[0, 2\pi[$  on pourrait se contenter d'une "carte" unique. Il n'en est rien car si, au cours de son mouvement le corps solide vient à traverser la position pour laquelle  $\vec{e}$  et  $\vec{e}$  sont confondus, l'angle  $\theta$

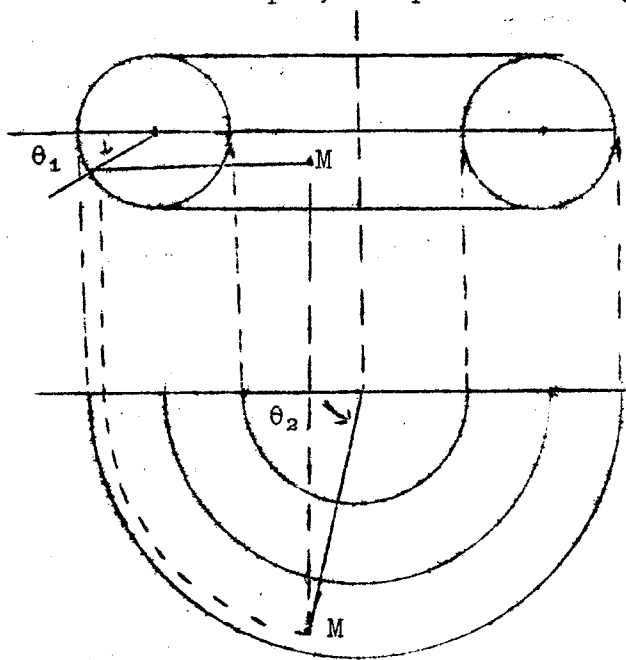
passera brusquement de la valeur 0 à une valeur très voisine de  $2\pi$  (ce qui est très gênant si  $\theta$  est une variable apparaissant dans une équation différentielle par exemple). Par contre avec deux cartes dont les domaines se "chevauchent" comme indiqué ci-dessus, on peut à chaque instant choisir une carte convenant à cet instant et aux instants suffisamment voisins.

c) Pendule double.

Considérons un système constitué par deux corps solides  $A_1$  et  $A_2$ , articulés entre eux par une articulation rotoïde.  $A_1$  est, de plus, articulé sur un bâti fixe (dans le référentiel  $\mathcal{R}$ ) par une autre articulation rotoïde. Pour simplifier la figure on a supposé les axes de ces deux articulations rotoïdes parallèles (cette limitation n'étant pas indispensable). Comme le montre la figure (qui prétend représenter une cloche et son battant) la position du système peut être repérée par deux angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$ .



Dans cet exemple, l'espace de configuration peut être identifié à un tore  $T^2$  : à toute position du système correspond en effet un point unique d'un tore, de latitude  $\theta_1$  et de longitude  $\theta_2$ . (Bien entendu l'espace de configuration effectif n'est qu'une partie du tore, la cloche et son battant étant astreints à ne pas s'interpénétrer).



#### 6 . 4 . 4 . Liaisons géométriques unilatérales.

Revenons aux notations employées dans le paragraphe 6.4.2 . Lorsque certaines des liaisons auxquelles est soumis le système étudié sont unilatérales, on peut généralement en tenir compte en remplaçant certaines des égalités (6.4.4) que doivent vérifier les paramètres  $q_i$  , par des inégalités, de la forme :

$$(6.4.5) \quad F_p (q_1, q_2, \dots, q_{sk}, t) \geq 0$$

L'étude de systèmes comportant des liaisons unilatérales est en général plus difficile que celle des systèmes dont toutes les liaisons sont bilatérales. C'est pourquoi on commence souvent par supposer toutes les liaisons bilatérales. Une fois résolu le problème dans ces hypothèses, on cherche à partir de quel instant les efforts de liaison ne vérifient plus les conditions exprimant le caractère unilatéral de la liaison (voir paragraphe 6.5.2 ci-après). On doit alors reprendre l'étude du système, à partir de l'instant ainsi déterminé, en supprimant la liaison correspondante.

#### 6 . 4 . 5 . Espace des états cinématiques.

Revenons aux hypothèses et notations du paragraphe 6.4.2 :

On étudie, relativement à un référentiel  $R$  , le mouvement d'un système constitué de  $k$  corps rigides  $A_1, A_2, \dots, A_k$  , soumis à un certain nombre de liaisons, que nous supposons pour le moment toutes géométriques, et bilatérales.

Définition. On appelle état cinématique du système à un instant  $t$  , la donnée à cet instant de la position et du champ de vecteurs vitesse (équiprojectif) de chacun des corps rigides  $A_1, A_2, \dots, A_k$  qui constituent le système, relativement au référentiel considéré  $R$  .

Si tous les corps rigides constituant le système sont libres (sans liaisons) il est facile de voir que pour définir un état cinématique du système,  $12k$  paramètres sont nécessaires et suffisants. En effet, la position de chaque corps  $A_i$  dépend de 6 paramètres; le champ de vecteurs vitesses de ce corps, étant équiprojectif, dépend lui aussi de 6 paramètres. Ceci traduit le fait que l'ensemble des états cinématiques possibles du système à l'instant considéré  $t$  est, dans le cas de  $k$  corps rigides libres, une variété différentielle de dimension  $12k$  . Cet ensemble est appelé l'espace des états cinématiques du système à l'instant  $t$  ; (on l'appelle aussi parfois, de manière impropre, espace des phases du système; il nous semble préférable de réserver ce nom à l'ensemble des positions et impulsions du système).

Dans le cas où le système est soumis à un certain nombre de liaisons géométriques bilatérales, on peut encore définir l'espace des états cinématiques du système à l'instant considéré  $t$ , comme l'ensemble des positions possibles et des champs de vecteurs vitesses possibles des corps rigides  $A_1, A_2, \dots, A_k$  qui constituent le système compatibles avec les liaisons. D'après les formules (6.4.3) et (6.4.4), la position d'un point cinématique déterminé  $M$  du système, s'exprime au moyen de  $6k$  paramètres  $q_i$  et du temps  $t$  par une relation de la forme :

$$(6.4.6) \quad M = M(q_1, \dots, q_{6k}, t)$$

les paramètres  $q_1, \dots, q_{6k}$  étant astreints à vérifier les  $\ell$  égalités, traduisant l'existence de liaisons géométriques :

$$(6.4.7) \quad F_p(q_1, \dots, q_{6k}, t) = 0 \quad (1 \leq p \leq \ell)$$

Dérivons (6.4.6) par rapport à  $t$ . On voit que la vitesse du point cinématique  $M$  s'exprime par :

$$(6.4.8) \quad \frac{d\vec{M}}{dt} = \sum_{i=1}^{6k} \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial \vec{M}}{\partial t}$$

les quantités  $\frac{dq_i}{dt}$  étant astreintes à vérifier les  $\ell$  relations, obtenues en dérivant (6.4.7) :

$$(6.4.9) \quad \sum_{i=1}^{6k} \frac{\partial F_p}{\partial q_i}(q_1, \dots, q_{6k}, t) \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial F_p}{\partial t} = 0 \quad (1 \leq p \leq \ell)$$

On voit ainsi qu'un état cinématique du système, à l'instant  $t$ , est déterminé par la donnée de  $12k$  paramètres  $q_1, q_2, \dots, q_{6k}, \frac{dq_1}{dt}, \frac{dq_2}{dt}, \dots, \frac{dq_{6k}}{dt}$  astreints de plus à vérifier les  $2\ell$  égalités (6.4.8) et (6.4.9). On a vu, paragraphe 6.4.2), que la matrice  $(\frac{\partial F_p}{\partial q_i})$  ( $1 \leq i \leq 6k, 1 \leq p \leq \ell$ ) était de rang  $\ell$ , et que par conséquent sur les  $6k$  paramètres  $q_i$ ,  $6k - \ell$  peuvent être choisis arbitrairement, les  $\ell$  autres étant alors déterminés par (6.4.7). De même, sur les  $6k$  paramètres  $\frac{dq_i}{dt}$ ,  $6k - \ell$  peuvent être choisis arbitrairement (ceux correspondant aux valeurs de l'indice  $i$  pour lesquelles les  $q_i$  peuvent être choisis arbitrairement), les  $\ell$  autres étant alors déterminés par (6.4.9).

Ce qui précède s'interprète en disant que l'espace des états cinématiques à l'instant  $t$  est une variété différentielle de dimension  $12k - 2\ell$ .



