

*Une propriété des champs de vecteurs
conformément hamiltoniens;
application au problème de Kepler*

Charles-Michel Marle

cmm1934@orange.fr

Université Pierre et Marie Curie

Paris, France

Sommaire

I. Introduction

II. Champs conformément hamiltoniens

1. Changement de variable indépendante
2. Définitions
3. Un théorème
4. Preuve du théorème
5. Corollaire

III. Le problème de Kepler

1. Équations
2. Intégrales premières
3. Symétries infinitésimales
4. Hodographe
5. Énergie et hodographe
6. Changement de variable

Sommaire (2)

IV. La régularisation de Moser

1. Projection stéréographique
2. Prolongement cotangent

V. Réinterprétation des résultats de Moser

1. L'application S
2. Le hamiltonien
3. Le facteur conforme
4. Le flot de H
5. Le difféomorphisme symplectique

Remerciements
Bibliographie

Appendice

Équation polaire de l'orbite

Orbite et hodographe, $\varepsilon = 0$

Orbite et hodographe, $\varepsilon = 1/2$

Orbite et hodographe, $\varepsilon = 1$

Orbite et hodographe, $\varepsilon = 2$

Mouvements singuliers

Mouvements d'énergie nulle

I. Introduction.

Le problème de Kepler est un système hamiltonien complètement intégrable dont l'importance pratique est très grande : c'est un modèle du mouvement des planètes du système solaire, et son équivalent quantique est un modèle de l'atome d'hydrogène.

I. Introduction.

Le problème de Kepler est un système hamiltonien complètement intégrable dont l'importance pratique est très grande : c'est un modèle du mouvement des planètes du système solaire, et son équivalent quantique est un modèle de l'atome d'hydrogène.

De plus, certaines de ses propriétés le rendent particulièrement intéressant du point de vue mathématique :

- Ses mouvements comportant une collision du point mobile avec le centre attractif ne sont pas définis pour toutes les valeurs du temps ; cependant, ce système est *régularisable* : on peut le projeter sur un autre système hamiltonien dont tous les mouvements sont *éternels* ;

- l'algèbre de Lie des symétries infinitésimales des mouvements d'énergie totale fixée dépend du niveau d'énergie considéré.

I. Introduction (2).

- Pour les mouvements d'énergie négative (*orbites elliptiques*) l'algèbre de Lie des symétries infinitésimales est isomorphe à $so(4)$;

I. Introduction (2).

- Pour les mouvements d'énergie négative (*orbites elliptiques*) l'algèbre de Lie des symétries infinitésimales est isomorphe à $so(4)$;
- pour les mouvements d'énergie nulle (*orbites paraboliques*) c'est $e(3)$: l'algèbre de Lie des déplacements infinitésimaux (rotations *et* translations) d'un espace euclidien de dimension 3 ;

I. Introduction (2).

- Pour les mouvements d'énergie négative (*orbites elliptiques*) l'algèbre de Lie des symétries infinitésimales est isomorphe à $so(4)$;
- pour les mouvements d'énergie nulle (*orbites paraboliques*) c'est $e(3)$: l'algèbre de Lie des déplacements infinitésimaux (rotations *et* translations) d'un espace euclidien de dimension 3 ;
- Pour les mouvements d'énergie positive (*orbites hyperboliques*) c'est $so(3, 1)$, l'algèbre de Lie des transformations de Lorentz infinitésimales d'un espace de Minkowski de dimension 4.

I. Introduction (2).

- Pour les mouvements d'énergie négative (*orbites elliptiques*) l'algèbre de Lie des symétries infinitésimales est isomorphe à $so(4)$;
 - pour les mouvements d'énergie nulle (*orbites paraboliques*) c'est $e(3)$: l'algèbre de Lie des déplacements infinitésimaux (rotations *et* translations) d'un espace euclidien de dimension 3 ;
 - Pour les mouvements d'énergie positive (*orbites hyperboliques*) c'est $so(3, 1)$, l'algèbre de Lie des transformations de Lorentz infinitésimales d'un espace de Minkowski de dimension 4.
- Globalement, l'ensemble des symétries infinitésimales du problème de Kepler n'est pas une algèbre de Lie, mais un *algébroïde de Lie*.

I. Introduction (3).

Il existe un difféomorphisme symplectique de l'espace des phases du problème de Kepler, restreint soit aux énergies négatives, soit aux énergies positives, sur un ouvert dense du fibré cotangent soit à une sphère de dimension 3, soit à un hyperboloïde à deux nappes de dimension 3, qui a été découvert par Györgyi (1968), redécouvert par Ligon et Schaaf (1976), discuté par Cushman et Duistermaat (1997).

I. Introduction (3).

Il existe un difféomorphisme symplectique de l'espace des phases du problème de Kepler, restreint soit aux énergies négatives, soit aux énergies positives, sur un ouvert dense du fibré cotangent soit à une sphère de dimension 3, soit à un hyperboloïde à deux nappes de dimension 3, qui a été découvert par Györgyi (1968), redécouvert par Ligon et Schaaf (1976), discuté par Cushman et Duistermaat (1997).

Le fait que ce difféomorphisme soit symplectique résulte d'une propriété simple des champs de vecteurs conformément hamiltoniens, exposée dans le paragraphe suivant.

I. Introduction (3).

Il existe un difféomorphisme symplectique de l'espace des phases du problème de Kepler, restreint soit aux énergies négatives, soit aux énergies positives, sur un ouvert dense du fibré cotangent soit à une sphère de dimension 3, soit à un hyperboloïde à deux nappes de dimension 3, qui a été découvert par Györgyi (1968), redécouvert par Ligon et Schaaf (1976), discuté par Cushman et Duistermaat (1997).

Le fait que ce difféomorphisme soit symplectique résulte d'une propriété simple des champs de vecteurs conformément hamiltoniens, exposée dans le paragraphe suivant.

Puis on verra comment cette propriété, combinée avec la méthode de régularisation de Moser, conduit au difféomorphisme de Györgyi, Ligon et Schaaf.

II. Champs conformément hamiltoniens.

1. Changement de variable (1)

Sur une variété M , soit X un champ de vecteurs et g une fonction différentiable *partout non nulle*. On considère les deux équations différentielles

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = g(\varphi(t))X(\varphi(t)), \quad (*)$$

$$\frac{d\psi(s)}{ds} = X(\psi(s)). \quad (**)$$

Soit $\sigma : \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que pour chaque solution φ de (*)

$$\frac{d}{dt}\sigma(t, \varphi(t)) = g(\varphi(t)). \quad (***)$$

II. Champs conformément hamiltoniens.

1. Changement de variable (2)

Pour chaque solution $\varphi : I_\varphi \rightarrow M$, I_φ intervalle ouvert de \mathbb{R} , soit

$$\sigma_\varphi(t) = \sigma(t, \varphi(t)).$$

Alors $\sigma_\varphi : I_\varphi \rightarrow \sigma_\varphi(I_\varphi)$ est un difféomorphisme et l'application

$$s \mapsto \psi(s) = \varphi \circ \sigma_\varphi^{-1}(s)$$

est une solution de l'équation différentielle (**).

II. Champs conformément hamiltoniens.

1. Changement de variable (2)

Pour chaque solution $\varphi : I_\varphi \rightarrow M$, I_φ intervalle ouvert de \mathbb{R} , soit

$$\sigma_\varphi(t) = \sigma(t, \varphi(t)).$$

Alors $\sigma_\varphi : I_\varphi \rightarrow \sigma_\varphi(I_\varphi)$ est un difféomorphisme et l'application

$$s \mapsto \psi(s) = \varphi \circ \sigma_\varphi^{-1}(s)$$

est une solution de l'équation différentielle (**).

Cette propriété est simplement la règle permettant de changer de variable indépendante (remplacement de t par s) dans une équation différentielle.

II. Champs conformément hamiltoniens. 2. Définitions

Le *flot réduit* (ou, en abrégé, le *flot*) d'un champ de vecteurs X sur M est l'application $\Psi_X : \mathcal{D}_X \rightarrow M$, où \mathcal{D}_X est un ouvert de $\mathbb{R} \times M$, tel que pour chaque $x_0 \in M$,

$t \mapsto \Psi_X(t, x_0)$ soit la solution maximale de

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = X(\varphi(t)) \quad \text{telle que} \quad \varphi(0) = x_0 .$$

II. Champs conformément hamiltoniens. 2. Définitions

Le *flot réduit* (ou, en abrégé, le *flot*) d'un champ de vecteurs X sur M est l'application $\Psi_X : \mathcal{D}_X \rightarrow M$, où \mathcal{D}_X est un ouvert de $\mathbb{R} \times M$, tel que pour chaque $x_0 \in M$,

$t \mapsto \Psi_X(t, x_0)$ soit la solution maximale de

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = X(\varphi(t)) \quad \text{telle que} \quad \varphi(0) = x_0.$$

On a donc

$$\frac{\partial \Psi_X(t, x_0)}{\partial t} = X(\Psi_X(t, x_0)), \quad \Psi_X(0, x_0) = x_0.$$

II. Champs conformément hamiltoniens. 2. Définitions (2)

Supposons maintenant que (M, ω) soit une variété symplectique et soit $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Le champ de vecteurs

$$X_H \quad \text{tel que} \quad i(X_H)\omega = -dH$$

est dit *champ hamiltonien associé à H* , et H est appelé son *hamiltonien*.

II. Champs conformément hamiltoniens. 2. Définitions (2)

Supposons maintenant que (M, ω) soit une variété symplectique et soit $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Le champ de vecteurs

$$X_H \quad \text{tel que} \quad i(X_H)\omega = -dH$$

est dit *champ hamiltonien associé à H* , et H est appelé son *hamiltonien*.

Soit $g : M \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ une fonction différentiable partout non nulle. Le champ de vecteurs gX_H sera dit *champ conformément hamiltonien*, de *hamiltonien* H et de *facteur conforme* g .

$$i(gX_H)\omega = gi(X_H)\omega = -g dH .$$

II. Champs conformément hamiltoniens. 3. Un théorème

Soit (M, ω_1) une variété symplectique, $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ un hamiltonien, X le champ de vecteurs hamiltonien associé

$$i(X)\omega_1 = -dH .$$

On suppose X complet, et on note $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow M$ son flot réduit : pour chaque $s \in \mathbb{R}$, $x_0 \in M$,

$$\frac{\partial \Psi(s, x_0)}{\partial s} = X(\Psi(s, x_0)) , \quad \Psi(0, x_0) = x_0 .$$

Soit M^0 un ouvert dense de M et $g : M^0 \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ une fonction différentiable partout non nulle. Soit $Y = gX$ le champ conformément hamiltonien de hamiltonien H et de facteur conforme g ,

$$i(Y)\omega_1 = -g dH .$$

II. Champs conformément hamiltoniens. 3. Un théorème (2)

Soit $\sigma : \mathbb{R} \times M^0 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable telle que pour chaque solution maximale $t \mapsto \varphi(t)$ de

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = Y(\varphi(t)), \quad \text{on ait} \quad \frac{d\sigma(t, \varphi(t))}{dt} = g(\varphi(t)).$$

On suppose qu'il existe sur M^0 une autre forme symplectique ω_2 telle que

$$i(Y)\omega_2 = -dH.$$

Autrement dit, le champ de vecteurs Y est à la fois hamiltonien relativement à ω_2 , avec H pour hamiltonien, et conformément hamiltonien relativement à ω_1 avec le même H pour hamiltonien et g pour facteur conforme.

II. Champs conformément hamiltoniens. 3. Un théorème (2)

Soit $\sigma : \mathbb{R} \times M^0 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable telle que pour chaque solution maximale $t \mapsto \varphi(t)$ de

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = Y(\varphi(t)), \quad \text{on ait} \quad \frac{d\sigma(t, \varphi(t))}{dt} = g(\varphi(t)).$$

On suppose qu'il existe sur M^0 une autre forme symplectique ω_2 telle que

$$i(Y)\omega_2 = -dH.$$

Autrement dit, le champ de vecteurs Y est à la fois hamiltonien relativement à ω_2 , avec H pour hamiltonien, et conformément hamiltonien relativement à ω_1 avec le même H pour hamiltonien et g pour facteur conforme.

Alors, l'application $\Xi : x \mapsto \Xi(x) = \Psi(-\sigma(0, x), x)$ est un **difféomorphisme symplectique** de (M^0, ω_2) sur un ouvert de (M, ω_1) .

II. Champs conformément hamiltoniens. 4. Preuve du théorème

1. L'application $x \mapsto \Psi(-\sigma(0, x), x)$ est ouverte et injective, en raison de propriétés de σ et du flot d'un champ de vecteurs.

II. Champs conformément hamiltoniens. 4. Preuve du théorème

1. L'application $x \mapsto \Psi(-\sigma(0, x), x)$ est ouverte et injective, en raison de propriétés de σ et du flot d'un champ de vecteurs.
2. Pour chaque s_0 fixé, l'application $\Psi_{s_0} : M \rightarrow M$ vérifie $\Psi_{s_0}^* \omega_1 = \omega_1$ puisque Ψ est le flot du champ de vecteurs X , hamiltonien relativement à ω_1 . Pour chaque $x_0 \in M^0$, en utilisant les propriétés d'associativité du flot, on peut composer l'application $x \mapsto \Psi(-\sigma(0, x), x)$ avec Ψ_{s_0} pour un s_0 bien choisi, après avoir éventuellement ajouté une constante à σ , et faire en sorte d'avoir à prouver que $x \mapsto \Psi(-\sigma(0, x), x)$ est symplectique seulement lorsque $\sigma(0, x_0) = 0$ et que x est élément d'un voisinage arbitrairement petit de x_0 .

II. Champs conformément hamiltoniens. 4. Preuve du théorème

1. L'application $x \mapsto \Psi(-\sigma(0, x), x)$ est ouverte et injective, en raison de propriétés de σ et du flot d'un champ de vecteurs.
2. Pour chaque s_0 fixé, l'application $\Psi_{s_0} : M \rightarrow M$ vérifie $\Psi_{s_0}^* \omega_1 = \omega_1$ puisque Ψ est le flot du champ de vecteurs X , hamiltonien relativement à ω_1 . Pour chaque $x_0 \in M^0$, en utilisant les propriétés d'associativité du flot, on peut composer l'application $x \mapsto \Psi(-\sigma(0, x), x)$ avec Ψ_{s_0} pour un s_0 bien choisi, après avoir éventuellement ajouté une constante à σ , et faire en sorte d'avoir à prouver que $x \mapsto \Psi(-\sigma(0, x), x)$ est symplectique seulement lorsque $\sigma(0, x_0) = 0$ et que x est élément d'un voisinage arbitrairement petit de x_0 .
3. On choisit un voisinage W de x_0 et un intervalle ouvert I contenant 0 de manière que $I \times W$ soit contenu dans le domaine de définition du flot réduit Φ du champ de vecteurs Y et que pour tous $(t, x) \in I \times W$, on ait $-\sigma(t, x) \in I$.

II. Champs conformément hamiltoniens. 4. Preuve du théorème (2)

4. Soit $\widetilde{M}_2 = I \times W$. On note t la coordonnée sur le facteur I .
On considère la 2-forme sur \widetilde{M}_2

$$\widetilde{\omega}_2 = \omega_2 - dH \wedge dt .$$

La variété \widetilde{M}_2 est feuilletée en courbes, les graphes de solutions $t \mapsto \varphi(t)$ de l'équation différentielle associée à Y ; ces courbes sont les feuilles du feuilletage déterminé par $\ker \widetilde{\omega}_2$.

II. Champs conformément hamiltoniens. 4. Preuve du théorème (2)

4. Soit $\widetilde{M}_2 = I \times W$. On note t la coordonnée sur le facteur I . On considère la 2-forme sur \widetilde{M}_2

$$\widetilde{\omega}_2 = \omega_2 - dH \wedge dt .$$

La variété \widetilde{M}_2 est feuilletée en courbes, les graphes de solutions $t \mapsto \varphi(t)$ de l'équation différentielle associée à Y ; ces courbes sont les feuilles du feuilletage déterminé par $\ker \widetilde{\omega}_2$.

5. De même, soit $\widetilde{M}_1 = \mathbb{R} \times M$, s la coordonnée sur le facteur \mathbb{R} . Soit

$$\widetilde{\omega}_1 = \omega_1 - dH \wedge ds .$$

La variété \widetilde{M}_1 est feuilletée en courbes, les graphes des solutions $s \mapsto \psi(s)$ de l'équation différentielle associée à X ; ces courbes sont les feuilles du feuilletage déterminé par $\ker \widetilde{\omega}_1$. Ce feuilletage est simple parce que le champ de vecteurs X est complet.

II. Champs conformément hamiltoniens. 4. Preuve du théorème (3)

6. Soit Φ le flot réduit de Y et Ψ celui de X . Pour chaque $x_1 \in W$, $t \mapsto \Phi(t, x_1)$ est la solution de l'équation différentielle associée à Y telle que $\Phi(0, x_1) = x_1$. Après reparamétrisation au moyen de la nouvelle variable indépendante s , c'est une solution $s \mapsto \psi(s)$ de l'équation différentielle associée à X . Mais s est donné en fonction de (t, x) par $s = \sigma(t, x)$. Le point $\psi(0)$ par lequel passe la courbe considérée pour $s = 0$ est

$$\Psi(-\sigma(0, x_1), x_1).$$

On cherche une application $\widetilde{M}_2 \rightarrow \widetilde{M}_1$, $(t, x) \mapsto (s, y)$, vérifiant $s = t$, qui applique le graphe de chaque solution φ de l'équation différentielle associée à Y dans le graphe de la solution correspondante ψ , déduite de φ par reparamétrage, de l'équation différentielle associée à X et qui entrelace les flots de ces deux équations.

II. Champs conformément hamiltoniens. 4. Preuve du théorème (4)

Cette application ne peut être que

$$(t, x) \mapsto \Upsilon(t, x) = \left(s = t, y = \Psi(-\sigma(t, x) + t, x) \right).$$

Elle applique les feuilles du feuilletage de \widetilde{M}_2 dans les feuilles du feuilletage de \widetilde{M}_1 . Par suite le noyau de $\Upsilon^*\widetilde{\omega}_1$ est le même que le noyau de $\widetilde{\omega}_2$. De plus

$$\Upsilon^*s = t, \quad \Upsilon^*H = H, \quad \text{donc} \quad \Upsilon^*(dH \wedge ds) = dH \wedge dt.$$

Donc nécessairement

$$\Upsilon^*\widetilde{\omega}_1 = \widetilde{\omega}_2.$$

En faisant $t = s = 0$ on en déduit le résultat annoncé

$$\Xi^*\omega_1 = \omega_2$$

puisque $\Upsilon(0, x) = (0, \Xi(x))$.

II. Champs conformément hamiltoniens. 5. Corollaire

Soient (M_1, ω_1) et (M_2, ω_2) deux variétés symplectiques, $H : M_1 \rightarrow \mathbb{R}$ un hamiltonien, X le champ de vecteurs hamiltonien associé sur M_1

$$i(X)\omega_1 = -dH .$$

On suppose X complet, et on note $\Psi : \mathbb{R} \times M_1 \rightarrow M_1$ son flot réduit : pour chaque $s \in \mathbb{R}$, $x_0 \in M_1$,

$$\frac{\partial \Psi(s, x_0)}{\partial s} = X(\Psi(s, x_0)) , \quad \Psi(0, x_0) = x_0 .$$

Soit $S : M_2 \rightarrow M_1$ un difféomorphisme (*pas forcément symplectique*) de M_2 sur un ouvert dense M_1^0 de M_1 et Y le champ de vecteurs hamiltonien sur (M_2, ω_2) de hamiltonien $H \circ S$

$$i(Y)\omega_2 = -d(H \circ S) .$$

II. Champs conformément hamiltoniens. 5. Corollaire (2)

Soit $\Phi : D_\Phi \rightarrow M_2$ le flot réduit de Y , qui n'est pas supposé complet : D_Φ est l'ouvert de $\mathbb{R} \times M_2$ sur lequel Φ est défini : pour chaque $y_0 \in M_2$, $(t, y_0) \in D_\Phi$ si et seulement si t appartient à l'intervalle de définition de la solution maximale de l'équation différentielle associée à Y qui prend la valeur y_0 pour $t = 0$

$$\frac{\partial \Phi(t, y_0)}{\partial t} = Y(\Phi(t, y_0)), \quad \Phi(0, y_0) = y_0.$$

II. Champs conformément hamiltoniens. 5. Corollaire (2)

Soit $\Phi : D_\Phi \rightarrow M_2$ le flot réduit de Y , qui n'est pas supposé complet : D_Φ est l'ouvert de $\mathbb{R} \times M_2$ sur lequel Φ est défini : pour chaque $y_0 \in M_2$, $(t, y_0) \in D_\Phi$ si et seulement si t appartient à l'intervalle de définition de la solution maximale de l'équation différentielle associée à Y qui prend la valeur y_0 pour $t = 0$

$$\frac{\partial \Phi(t, y_0)}{\partial t} = Y(\Phi(t, y_0)), \quad \Phi(0, y_0) = y_0.$$

Soit $S_*(Y)$ le champ de vecteurs défini sur l'ouvert dense M_1^0 de M_1 , image directe par S du champ de vecteurs Y . On suppose qu'il existe une fonction différentiable partout non nulle $g : M_1^0 \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ telle que, sur l'ouvert dense M_1^0 de M_1 ,

$$S_*(Y) = gX.$$

II. Champs conformément hamiltoniens. 5. Corollaire (3)

Donc $S_*(Y)$ est conformément hamiltonien de hamiltonien H et de facteur conforme g , relativement à ω_1 :

$$i(S_*(Y))\omega_1 = -g dH .$$

II. Champs conformément hamiltoniens. 5. Corollaire (3)

Donc $S_*(Y)$ est conformément hamiltonien de hamiltonien H et de facteur conforme g , relativement à ω_1 :

$$i(S_*(Y))\omega_1 = -g dH .$$

Soit $\sigma : \mathbb{R} \times M_1^0 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable telle que pour chaque solution maximale $t \mapsto \varphi(t)$ de

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = S_*(Y)(\varphi(t)) , \quad \text{on ait} \quad \frac{d\sigma(t, \varphi(t))}{dt} = g(\varphi(t)) .$$

II. Champs conformément hamiltoniens. 5. Corollaire (4)

Alors, l'application $\Xi : M_2 \rightarrow M_1$,

$$y \mapsto \Xi(y) = \Psi\left(-\sigma(0, S(y)), S(y)\right)$$

est un *difféomorphisme symplectique* de (M_2, ω_2) sur un ouvert de (M_1, ω_1) qui entrelace les flots Φ et Ψ , c'est-à-dire qui vérifie chaque fois que le membre de gauche est défini

$$\Xi \circ \Phi_t = \Psi_t \circ \Xi.$$

II. Champs conformément hamiltoniens. 5. Corollaire (4)

Alors, l'application $\Xi : M_2 \rightarrow M_1$,

$$y \mapsto \Xi(y) = \Psi \left(-\sigma(0, S(y)), S(y) \right)$$

est un *difféomorphisme symplectique* de (M_2, ω_2) sur un ouvert de (M_1, ω_1) qui entrelace les flots Φ et Ψ , c'est-à-dire qui vérifie chaque fois que le membre de gauche est défini

$$\Xi \circ \Phi_t = \Psi_t \circ \Xi.$$

Preuve : En identifiant, au moyen du difféomorphisme S , M_2 à son image, l'ouvert dense M_1^0 de M_1 , on est immédiatement ramené au théorème.

II. Champs conformément hamiltoniens. 5. Corollaire (4)

Alors, l'application $\Xi : M_2 \rightarrow M_1$,

$$y \mapsto \Xi(y) = \Psi \left(-\sigma(0, S(y)), S(y) \right)$$

est un *difféomorphisme symplectique* de (M_2, ω_2) sur un ouvert de (M_1, ω_1) qui entrelace les flots Φ et Ψ , c'est-à-dire qui vérifie chaque fois que le membre de gauche est défini

$$\Xi \circ \Phi_t = \Psi_t \circ \Xi.$$

Preuve : En identifiant, au moyen du difféomorphisme S , M_2 à son image, l'ouvert dense M_1^0 de M_1 , on est immédiatement ramené au théorème.

C'est ce corollaire que nous appliquerons au problème de Kepler : (M_2, ω_2) sera l'espace des phases du problème de Kepler (restreint soit aux énergies négatives, soit aux énergies positives) et (M_1, ω_1) le fibré cotangent à une sphère, ou à un hyperboloïde de révolution à deux nappes, de dimension 3.

III. Le problème de Kepler. 1. Équations

Dans l'espace physique \mathcal{E} (espace affine euclidien de dimension 3, d'espace vectoriel associé $\vec{\mathcal{E}}$), soit P un point matériel de masse m soumis au champ gravitationnel d'un centre attractif O . Soit :

III. Le problème de Kepler. 1. Équations

Dans l'espace physique \mathcal{E} (espace affine euclidien de dimension 3, d'espace vectoriel associé $\vec{\mathcal{E}}$), soit P un point matériel de masse m soumis au champ gravitationnel d'un centre attractif O . Soit :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP}; \quad r = \|\vec{r}\|; \quad \vec{p} = m \frac{d\vec{r}}{dt}; \quad p = \|\vec{p}\|.$$

III. Le problème de Kepler. 1. Équations

Dans l'espace physique \mathcal{E} (espace affine euclidien de dimension 3, d'espace vectoriel associé $\vec{\mathcal{E}}$), soit P un point matériel de masse m soumis au champ gravitationnel d'un centre attractif O . Soit :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP}; \quad r = \|\vec{r}\|; \quad \vec{p} = m \frac{d\vec{r}}{dt}; \quad p = \|\vec{p}\|.$$

La force \vec{f} exercée sur P est

$$\vec{f} = -\frac{km\vec{r}}{r^3},$$

où k est la constante qui caractérise le champ attractif créé par O .

III. Le problème de Kepler. 1. Équations

Dans l'espace physique \mathcal{E} (espace affine euclidien de dimension 3, d'espace vectoriel associé $\vec{\mathcal{E}}$), soit P un point matériel de masse m soumis au champ gravitationnel d'un centre attractif O . Soit :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP}; \quad r = \|\vec{r}\|; \quad \vec{p} = m \frac{d\vec{r}}{dt}; \quad p = \|\vec{p}\|.$$

La force \vec{f} exercée sur P est

$$\vec{f} = -\frac{km\vec{r}}{r^3},$$

où k est la constante qui caractérise le champ attractif créé par O . Les équations du mouvement sont

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{p}}{m}, \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{km\vec{r}}{r^3}.$$

III. Le problème de Kepler. 2. Intégrales première

Ces équations différentielles sont celles d'un système hamiltonien, sur une variété symplectique de dimension 6, le fibré cotangent à $\mathcal{E} \setminus \{O\}$, identifié au fibré tangent grâce au produit scalaire euclidien. Le hamiltonien est

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{mk}{r}.$$

III. Le problème de Kepler. 2. Intégrales première

Ces équations différentielles sont celles d'un système hamiltonien, sur une variété symplectique de dimension 6, le fibré cotangent à $\mathcal{E} \setminus \{O\}$, identifié au fibré tangent grâce au produit scalaire euclidien. Le hamiltonien est

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{mk}{r}.$$

Le groupe de symétrie naturel du problème est $SO(3)$. L'application moment correspondante est le *moment cinétique*, qu'on peut considérer comme un vecteur élément de $\vec{\mathcal{E}}$ une fois une orientation choisie :

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \quad \text{où } \times \text{ est le produit vectoriel.}$$

(on identifie l'algèbre de Lie de $SO(3)$ et son dual avec l'espace vectoriel euclidien $\vec{\mathcal{E}}$, le crochet de l'algèbre de Lie s'identifie alors au produit vectoriel).

III. Le problème de Kepler. 2. Intégrales premières (2)

Outre l'énergie E et le moment cinétique \vec{L} , le problème de Kepler admet pour intégrale première le *vecteur excentricité*

$$\vec{\varepsilon} = -\frac{\vec{r}}{r} + \frac{\vec{p} \times \vec{L}}{m^2 k} = \left(\frac{\|\vec{p}\|^2}{m^2 k} - \frac{1}{r} \right) \vec{r} - \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{m^2 k} \vec{p},$$

découvert par *Jakob Hermann (1678–1753)*, improprement appelé *vecteur de Laplace*, ou *vecteur de Runge-Lenz*, dont l'origine est longtemps restée mystérieuse.

III. Le problème de Kepler. 2. Intégrales premières (2)

Outre l'énergie E et le moment cinétique \vec{L} , le problème de Kepler admet pour intégrale première le *vecteur excentricité*

$$\vec{\varepsilon} = -\frac{\vec{r}}{r} + \frac{\vec{p} \times \vec{L}}{m^2 k} = \left(\frac{\|\vec{p}\|^2}{m^2 k} - \frac{1}{r} \right) \vec{r} - \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{m^2 k} \vec{p},$$

découvert par *Jakob Hermann (1678–1753)*, improprement appelé *vecteur de Laplace*, ou *vecteur de Runge-Lenz*, dont l'origine est longtemps restée mystérieuse.

En utilisant ces intégrales premières, il est facile de déterminer toutes les solutions du problème.

III. Le problème de Kepler. 3. Symétries infinitésimales

Soient $L_1, L_2, L_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ les composantes, dans un repère orthonormé fixe d'orientation positive, du moment cinétique \vec{L} et du vecteur excentricité $\vec{\varepsilon}$. Puisque \vec{L} et $\vec{\varepsilon}$ sont des intégrales premières, les champs de vecteurs hamiltoniens ayant pour hamiltoniens L_i ou ε_j ($1 \leq i, j \leq 3$) sont des symétries infinitésimales du problème de Kepler.

III. Le problème de Kepler. 3. Symétries infinitésimales

Soient $L_1, L_2, L_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ les composantes, dans un repère orthonormé fixe d'orientation positive, du moment cinétique \vec{L} et du vecteur excentricité $\vec{\varepsilon}$. Puisque \vec{L} et $\vec{\varepsilon}$ sont des intégrales premières, les champs de vecteurs hamiltoniens ayant pour hamiltoniens L_i ou ε_j ($1 \leq i, j \leq 3$) sont des symétries infinitésimales du problème de Kepler.

Le crochet de deux champs de vecteurs hamiltoniens étant hamiltonien, avec pour hamiltonien le crochet de Poisson des hamiltoniens des deux champs, au lieu de calculer les crochets des symétries infinitésimales engendrées par les composantes L_i et ε_j , on peut calculer les crochets de Poisson de ces fonctions. On trouve

III. Le problème de Kepler. 3. Symétries infinitésimales (2)

$$\begin{aligned}\{L_1, L_2\} &= -L_3, & \{L_2, L_3\} &= -L_1, & \{L_3, L_1\} &= -L_2; \\ \{L_1, \varepsilon_1\} &= 0, & \{L_1, \varepsilon_2\} &= -\varepsilon_3, & \{L_1, \varepsilon_3\} &= \varepsilon_2; \\ \{L_2, \varepsilon_1\} &= \varepsilon_3, & \{L_2, \varepsilon_2\} &= 0, & \{L_2, \varepsilon_3\} &= -\varepsilon_1; \\ \{L_3, \varepsilon_1\} &= -\varepsilon_2, & \{L_3, \varepsilon_2\} &= \varepsilon_1, & \{L_3, \varepsilon_3\} &= 0; \\ \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} &= \frac{2E}{m^3 k^2} L_3, & \{\varepsilon_2, \varepsilon_3\} &= \frac{2E}{m^3 k^2} L_1, & \{\varepsilon_3, \varepsilon_1\} &= \frac{2E}{m^3 k^2} L_2.\end{aligned}$$

III. Le problème de Kepler. 3. Symétries infinitésimales (2)

$$\begin{aligned}\{L_1, L_2\} &= -L_3, & \{L_2, L_3\} &= -L_1, & \{L_3, L_1\} &= -L_2; \\ \{L_1, \varepsilon_1\} &= 0, & \{L_1, \varepsilon_2\} &= -\varepsilon_3, & \{L_1, \varepsilon_3\} &= \varepsilon_2; \\ \{L_2, \varepsilon_1\} &= \varepsilon_3, & \{L_2, \varepsilon_2\} &= 0, & \{L_2, \varepsilon_3\} &= -\varepsilon_1; \\ \{L_3, \varepsilon_1\} &= -\varepsilon_2, & \{L_3, \varepsilon_2\} &= \varepsilon_1, & \{L_3, \varepsilon_3\} &= 0; \\ \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} &= \frac{2E}{m^3 k^2} L_3, & \{\varepsilon_2, \varepsilon_3\} &= \frac{2E}{m^3 k^2} L_1, & \{\varepsilon_3, \varepsilon_1\} &= \frac{2E}{m^3 k^2} L_2.\end{aligned}$$

Ces formules montrent que lorsqu'on se restreint à une sous-variété $E = \text{Constante}$ de l'espace des phases, les L_i et les ε_j forment une base d'une algèbre de Lie. Mais *globalement*, ces fonctions *ne forment pas la base d'une algèbre de Lie*.

III. Le problème de Kepler. 3. Symétries infinitésimales (3)

Bien sûr, sur l'ouvert de l'espace des phases sur lequel $E < 0$ et sur l'ouvert sur lequel $E > 0$, on peut remplacer $\vec{\varepsilon}$ par $(\vec{\varepsilon}/E)$.

Sur chacun de ces ouverts, les composantes de \vec{L} et de $(\vec{\varepsilon}/E)$ forment une base d'une algèbre de Lie. Mais ces deux algèbres de Lie sont *différentes* l'une de l'autre :

III. Le problème de Kepler. 3. Symétries infinitésimales (3)

Bien sûr, sur l'ouvert de l'espace des phases sur lequel $E < 0$ et sur l'ouvert sur lequel $E > 0$, on peut remplacer $\vec{\varepsilon}$ par $(\vec{\varepsilon}/E)$.

Sur chacun de ces ouverts, les composantes de \vec{L} et de $(\vec{\varepsilon}/E)$ forment une base d'une algèbre de Lie. Mais ces deux algèbres de Lie sont *différentes* l'une de l'autre :

- sur l'ouvert sur lequel $E < 0$, c'est $so(4)$;

III. Le problème de Kepler. 3. Symétries infinitésimales (3)

Bien sûr, sur l'ouvert de l'espace des phases sur lequel $E < 0$ et sur l'ouvert sur lequel $E > 0$, on peut remplacer $\vec{\varepsilon}$ par $(\vec{\varepsilon}/E)$.

Sur chacun de ces ouverts, les composantes de \vec{L} et de $(\vec{\varepsilon}/E)$ forment une base d'une algèbre de Lie. Mais ces deux algèbres de Lie sont *différentes* l'une de l'autre :

- sur l'ouvert sur lequel $E < 0$, c'est $so(4)$;
- sur l'ouvert sur lequel $E > 0$, c'est $so(3, 1)$;

III. Le problème de Kepler. 3. Symétries infinitésimales (3)

Bien sûr, sur l'ouvert de l'espace des phases sur lequel $E < 0$ et sur l'ouvert sur lequel $E > 0$, on peut remplacer $\vec{\varepsilon}$ par $(\vec{\varepsilon}/E)$.

Sur chacun de ces ouverts, les composantes de \vec{L} et de $(\vec{\varepsilon}/E)$ forment une base d'une algèbre de Lie. Mais ces deux algèbres de Lie sont *différentes* l'une de l'autre :

- sur l'ouvert sur lequel $E < 0$, c'est $so(4)$;
- sur l'ouvert sur lequel $E > 0$, c'est $so(3, 1)$;

Sur la sous-variété de codimension 1 sur laquelle $E = 0$, les composantes de \vec{L} et de $\vec{\varepsilon}$ forment la base de l'algèbre de Lie $e(3)$ des déplacements infinitésimaux (*rotations et translations*) d'un *espace affine euclidien de dimension 3*.

III. Le problème de Kepler. 3. Symétries infinitésimales (3)

Bien sûr, sur l'ouvert de l'espace des phases sur lequel $E < 0$ et sur l'ouvert sur lequel $E > 0$, on peut remplacer $\vec{\varepsilon}$ par $(\vec{\varepsilon}/E)$.

Sur chacun de ces ouverts, les composantes de \vec{L} et de $(\vec{\varepsilon}/E)$ forment une base d'une algèbre de Lie. Mais ces deux algèbres de Lie sont *différentes* l'une de l'autre :

- sur l'ouvert sur lequel $E < 0$, c'est $so(4)$;
- sur l'ouvert sur lequel $E > 0$, c'est $so(3, 1)$;

Sur la sous-variété de codimension 1 sur laquelle $E = 0$, les composantes de \vec{L} et de $\vec{\varepsilon}$ forment la base de l'algèbre de Lie $e(3)$ des déplacements infinitésimaux (*rotations et translations*) d'un *espace affine euclidien de dimension 3*.

L'ensemble des symétries infinitésimales du problème de Kepler est un *algébroïde de Lie*, non une algèbre de Lie.

III. Le problème de Kepler. 4. L'hodographe

Je ne reviendrai pas sur la résolution du problème de Kepler, qui est très bien décrite dans de nombreux ouvrages. Je rappelle seulement que si, à partir du point O pris pour origine, on trace un vecteur égal à \vec{p} , l'extrémité de ce vecteur parcourt un cercle (lorsque $E < 0$) ou un arc de cercle (lorsque $E \geq 0$). Ce cercle a pour centre un point C , en général distinct de O , et a pour rayon

$$\mathcal{R} = \frac{m^2 k}{|L|}.$$

III. Le problème de Kepler. 4. L'hodographe

Je ne reviendrai pas sur la résolution du problème de Kepler, qui est très bien décrite dans de nombreux ouvrages. Je rappelle seulement que si, à partir du point O pris pour origine, on trace un vecteur égal à \overrightarrow{p} , l'extrémité de ce vecteur parcourt un cercle (lorsque $E < 0$) ou un arc de cercle (lorsque $E \geq 0$). Ce cercle a pour centre un point C , en général distinct de O , et a pour rayon

$$\mathcal{R} = \frac{m^2 k}{|L|}.$$

Je dirai que ce cercle, ou cet arc de cercle, est l'*hodographe* du problème de Kepler.

III. Le problème de Kepler. 4. L'hodographe

Je ne reviendrai pas sur la résolution du problème de Kepler, qui est très bien décrite dans de nombreux ouvrages. Je rappelle seulement que si, à partir du point O pris pour origine, on trace un vecteur égal à \vec{p} , l'extrémité de ce vecteur parcourt un cercle (lorsque $E < 0$) ou un arc de cercle (lorsque $E \geq 0$). Ce cercle a pour centre un point C , en général distinct de O , et a pour rayon

$$\mathcal{R} = \frac{m^2 k}{|L|}.$$

Je dirai que ce cercle, ou cet arc de cercle, est l'*hodographe* du problème de Kepler.

La méthode de régularisation de Moser est essentiellement basée sur le fait que l'hodographe du problème de Kepler est un cercle, et sur le fait que la projection stéréographique inverse transforme un cercle de l'espace \mathcal{E} en un cercle tracé sur une sphère de dimension 3.

III. Le problème de Kepler. 5. Énergie et hodographe

Il existe une relation très simple entre l'énergie E d'un mouvement du problème de Kepler, la distance c du centre de son hodographe au point O , et le rayon \mathcal{R} de l'hodographe :

$$E = \frac{m^3 k^2}{2L^2} (\varepsilon^2 - 1) = \frac{1}{2m} (c^2 - \mathcal{R}^2).$$

III. Le problème de Kepler. 5. Énergie et hodographe

Il existe une relation très simple entre l'énergie E d'un mouvement du problème de Kepler, la distance c du centre de son hodographe au point O , et le rayon \mathcal{R} de l'hodographe :

$$E = \frac{m^3 k^2}{2L^2} (\varepsilon^2 - 1) = \frac{1}{2m} (c^2 - \mathcal{R}^2).$$

Proposition La *puissance* $(c^2 - \mathcal{R}^2)$ du point O par rapport à l'hodographe est égale à $2mE$, où E est l'*énergie*.

III. Le problème de Kepler. 6. Changement de variable

Soit σ la fonction, définie sur le produit de \mathbb{R} avec l'espace des phases du problème de Kepler,

$$\sigma(t, (\vec{r}, \vec{p})) = \frac{1}{mk} (\vec{p} \cdot \vec{r} - 2E(\vec{r}, \vec{p})t).$$

Pour chaque solution $t \mapsto (\vec{r}(t), \vec{p}(t))$ du problème de Kepler,

$$\frac{d\sigma(t, (\vec{r}(t), \vec{p}(t)))}{dt} = \frac{1}{r(t)}.$$

III. Le problème de Kepler. 6. Changement de variable

Soit σ la fonction, définie sur le produit de \mathbb{R} avec l'espace des phases du problème de Kepler,

$$\sigma(t, (\vec{r}, \vec{p})) = \frac{1}{mk} (\vec{p} \cdot \vec{r} - 2E(\vec{r}, \vec{p})t).$$

Pour chaque solution $t \mapsto (\vec{r}(t), \vec{p}(t))$ du problème de Kepler,

$$\frac{d\sigma(t, (\vec{r}(t), \vec{p}(t)))}{dt} = \frac{1}{r(t)}.$$

Avec $s(t) = \sigma(t, \vec{r}(t), \vec{p}(t))$ comme nouvelle variable indépendante, les équations deviennent

$$\frac{d\vec{r}(s)}{ds} = \frac{r(s)\vec{p}(s)}{m}, \quad \frac{d\vec{p}(s)}{ds} = -\frac{mkr(s)\vec{r}(s)}{r^2(s)}.$$

III. Le problème de Kepler. 6. Changement de variable (2)

Avec cette nouvelle variable indépendante, le système n'est plus hamiltonien, mais plutôt *conformément hamiltonien*. Le hamiltonien est toujours l'énergie $E(\vec{r}, \vec{p})$ et le facteur conforme est

$$f(\vec{r}, \vec{p}) = r .$$

Cette nouvelle variable indépendante est le *paramètre de Levi-Civita*.

III. Le problème de Kepler. 6. Changement de variable (2)

Avec cette nouvelle variable indépendante, le système n'est plus hamiltonien, mais plutôt *conformément hamiltonien*. Le hamiltonien est toujours l'énergie $E(\vec{r}, \vec{p})$ et le facteur conforme est

$$f(\vec{r}, \vec{p}) = r .$$

Cette nouvelle variable indépendante est le *paramètre de Levi-Civita*.

Dans la suite, ce n'est pas dans l'espace des phases du problème de Kepler que nous ferons ce changement de variable indépendante, car sur cet espace les champs de vecteurs considérés ne sont pas complets, mais dans son image par un difféomorphisme (non symplectique) S , qui transforme le champ hamiltonien du problème de Kepler en champ conformément hamiltonien, et inversement, le champ conformément hamiltonien défini ci-dessus en champ hamiltonien.

IV. Régularisation de Moser. 1. Projection stéréographique

En 1935, Fock a employé une *projection stéréographique inverse* pour l'étude des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène en mécanique quantique [8]. Moser [22] a utilisé la même idée pour la régularisation du problème de Kepler. On obtient ainsi une correspondance entre les hodographes orientés des mouvements d'énergie $E < 0$ fixée et les *grands cercles orientés* d'une sphère de dimension 3.

IV. Régularisation de Moser. 1. Projection stéréographique

En 1935, Fock a employé une *projection stéréographique inverse* pour l'étude des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène en mécanique quantique [8]. Moser [22] a utilisé la même idée pour la régularisation du problème de Kepler. On obtient ainsi une correspondance entre les hodographes orientés des mouvements d'énergie $E < 0$ fixée et les *grands cercles orientés* d'une sphère de dimension 3.

Pour les mouvements d'énergie positive fixée, on doit remplacer la sphère par un hyperboloïde de révolution à deux nappes, de dimension 3. On obtient une correspondance entre les hodographes orientés de mouvements d'énergie $E > 0$ fixée et les *grandes hyperboles* de cet hyperboloïde.

IV. Régularisation de Moser. 1. Projection stéréographique (2)

Pour traiter en même temps les cas $E < 0$ et $E > 0$, on introduit la variable auxiliaire

$$\zeta = \begin{cases} 1 & \text{si } E < 0, \\ -1 & \text{si } E > 0. \end{cases}$$

Soit $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ une base orthonormée de \mathcal{E} avec O pour origine. On ajoute à cette base un vecteur unitaire de plus \vec{e}_h , et on note h la coordonnée correspondante. On obtient ainsi un espace affine de dimension 4, noté \mathcal{F} . L'espace physique \mathcal{E} sera identifié au sous-espace de \mathcal{F} d'équation $h = 0$.

IV. Régularisation de Moser. 1. Projection stéréographique (2)

Pour traiter en même temps les cas $E < 0$ et $E > 0$, on introduit la variable auxiliaire

$$\zeta = \begin{cases} 1 & \text{si } E < 0, \\ -1 & \text{si } E > 0. \end{cases}$$

Soit $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ une base orthonormée de \mathcal{E} avec O pour origine. On ajoute à cette base un vecteur unitaire de plus \vec{e}_h , et on note h la coordonnée correspondante. On obtient ainsi un espace affine de dimension 4, noté \mathcal{F} . L'espace physique \mathcal{E} sera identifié au sous-espace de \mathcal{F} d'équation $h = 0$.

Soit Q_ρ la quadrique d'équation

$$h^2 + \zeta(x^2 + y^2 + z^2) = \rho^2, \quad \text{avec } \rho > 0.$$

C'est une *sphère* si $\zeta = 1$, un *hyperboloïde de révolution à deux nappes* si $\zeta = -1$.

IV. Régularisation de Moser. 1. Projection stéréographique (3)

On va voir qu'il y a une valeur de ρ particulièrement adaptée à chaque valeur de l'énergie E . Soit N le point de coordonnées $(x = y = z = 0, \quad h = \rho)$. La *projection stéréographique* (usuelle si $\zeta = 1$, généralisée si $\zeta = -1$) de la quadrique Q_ρ moins le point N sur l'espace \mathcal{E} est l'application qui associe, à chaque point $M \in Q_\rho \setminus \{N\}$, le point d'intersection de la ligne droite qui joint N et M , avec \mathcal{E} (identifié à l'hyperplan de \mathcal{F} d'équation $h = 0$).

IV. Régularisation de Moser. 1. Projection stéréographique (3)

On va voir qu'il y a une valeur de ρ particulièrement adaptée à chaque valeur de l'énergie E . Soit N le point de coordonnées $(x = y = z = 0, \quad h = \rho)$. La **projection stéréographique** (usuelle si $\zeta = 1$, généralisée si $\zeta = -1$) de la quadrique Q_ρ moins le point N sur l'espace \mathcal{E} est l'application qui associe, à chaque point $M \in Q_\rho \setminus \{N\}$, le point d'intersection de la ligne droite qui joint N et M , avec \mathcal{E} (identifié à l'hyperplan de \mathcal{F} d'équation $h = 0$).

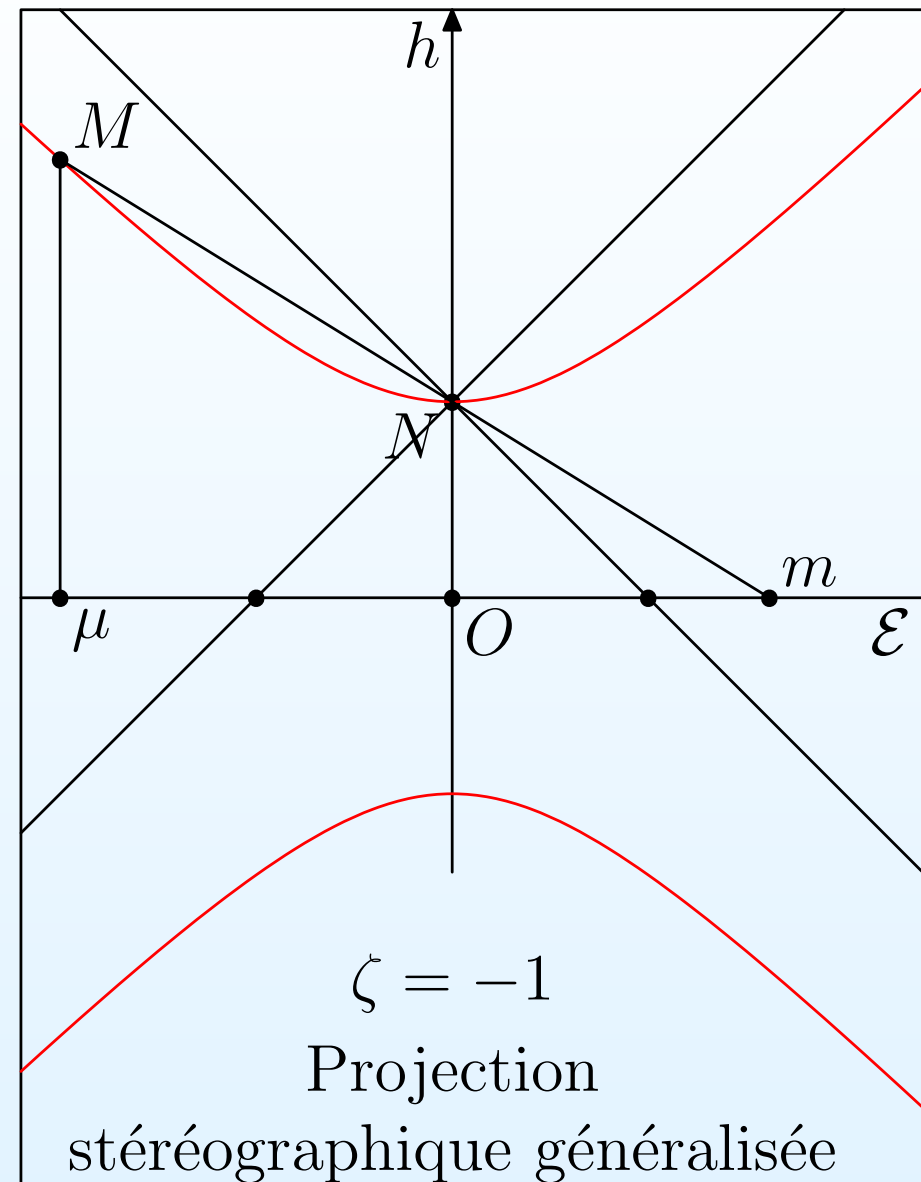
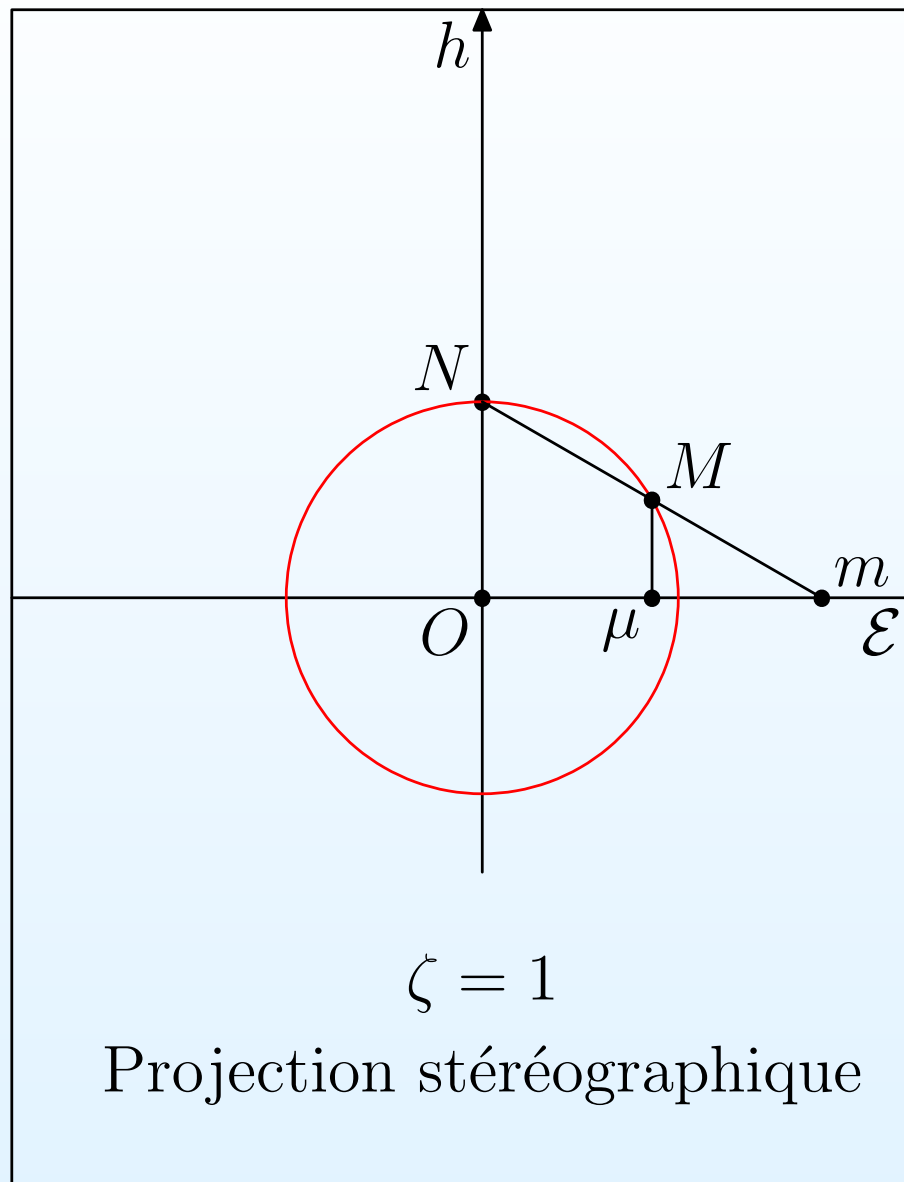
 Si $\zeta = 1$ c'est un difféomorphisme de $Q_\rho \setminus \{N\}$ sur \mathcal{E} .

IV. Régularisation de Moser. 1. Projection stéréographique (3)

On va voir qu'il y a une valeur de ρ particulièrement adaptée à chaque valeur de l'énergie E . Soit N le point de coordonnées $(x = y = z = 0, \quad h = \rho)$. La **projection stéréographique** (usuelle si $\zeta = 1$, généralisée si $\zeta = -1$) de la quadrique Q_ρ moins le point N sur l'espace \mathcal{E} est l'application qui associe, à chaque point $M \in Q_\rho \setminus \{N\}$, le point d'intersection de la ligne droite qui joint N et M , avec \mathcal{E} (identifié à l'hyperplan de \mathcal{F} d'équation $h = 0$).

- Si $\zeta = 1$ c'est un difféomorphisme de $Q_\rho \setminus \{N\}$ sur \mathcal{E} .
- Si $\zeta = -1$ c'est un difféomorphisme de $Q_\rho \setminus \{N\}$ sur l'ouvert de \mathcal{E} complémentaire de la 2-sphère de centre O et de rayon ρ . La nappe supérieure ($h > 0$) de l'hyperboloïde (moins le point N) s'applique sur l'extérieur de cette sphère et la nappe inférieure ($h < 0$) sur son intérieur.

IV. Régularisation de Moser. 1. Projection stéréographique (4)



IV. Régularisation de Moser. 2. Prolongement cotangent

Puisque la projection stéréographique est un difféomorphisme on peut, de manière unique, la prolonger aux fibrés cotangents de manière telle que l'image réciproque de la forme de Liouville de $T^*\mathcal{E}$ soit égale à la forme de Liouville de $T^*(Q_\rho \setminus \{N\})$.

On applique cette construction avec $\overrightarrow{Om} = \overrightarrow{p}$, impulsion d'un mouvement képlérien d'énergie $E \neq 0$.

VI. Régularisation de Moser. 2. Prolongement cotangent (2)

Chaque 1-forme sur \mathcal{E} s'écrit $\vec{r} \cdot d\vec{Om}$, où \vec{r} est un champ de vecteurs sur \mathcal{E} , ou, puisque $\vec{Om} = \vec{p}$,

$$\vec{r} \cdot d\vec{p} = r_x dp_x + r_y dp_y + r_z dp_z .$$

Rappelons que $\zeta = 1$ si $E < 0$ et $\zeta = -1$ si $E > 0$. L'équation de Q_ρ est

$$\vec{OM} \cdot \vec{OM} = x^2 + y^2 + z^2 + \zeta h^2 = \zeta \rho^2 .$$

Chaque 1-forme sur Q_ρ s'écrit

$$\vec{W} \cdot d\vec{OM} = W_x dx + W_y dy + W_z dz + \zeta W_h dh ,$$

où \vec{W} est un champ de vecteurs sur Q_ρ , tangent à cette quadrique. Donc,

$$\vec{W} \cdot \vec{OM} = W_x x + W_y y + W_z z + \zeta W_h h = 0 .$$

IV. Régularisation de Moser. 2. Prolongement cotangent (3)

Le prolongement cotangent de la projection stéréographique (éventuellement généralisée) sera noté S_ρ . Il applique chaque couple (M, \vec{W}) d'un point $M \in Q_\rho \setminus \{N\}$ et d'un vecteur \vec{W} tangent à Q_ρ en ce point, sur un couple (\vec{r}, \vec{p}) de deux vecteurs de $\vec{\mathcal{E}}$, d'une manière telle que

$$\vec{W} \cdot d\vec{OM} = \vec{r} \cdot d\vec{p}.$$

Les formules donnant (\vec{p}, \vec{r}) en fonction de (\vec{OM}, \vec{W}) s'obtiennent moyennant quelques calculs.

IV. Régularisation de Moser. 2. Prolongement cotangent (4)

Ces formules sont :

$$\begin{cases} \vec{p} = \frac{\rho}{\rho - h} \vec{O\mu}, & \text{avec } h^2 + \zeta \|\vec{O\mu}\|^2 = \rho^2, \\ \vec{r} = \frac{\rho - h}{\rho} \vec{W_3} + \frac{W_h}{\rho} \vec{O\mu}, \end{cases}$$

où on a posé

$$\vec{OM} = \vec{O\mu} + h\vec{e}_h, \quad \vec{W} = \vec{W_3} + W_h\vec{e}_h,$$

IV. Régularisation de Moser. 2. Prolongement cotangent (5)

Les formules donnant la transformation inverse sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{O\hat{\mu}} = \frac{2\rho^2}{\rho^2 + \zeta p^2} \overrightarrow{p}, \\ h = \rho \frac{p^2 - \zeta \rho^2}{p^2 + \zeta \rho^2}, \quad \text{avec } p = \|\overrightarrow{p}\| = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}, \\ \overrightarrow{W_3} = \frac{\rho^2 + \zeta p^2}{2\rho^2} \overrightarrow{r} - \frac{\zeta \overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{p}}{\rho^2} \overrightarrow{p}, \\ W_h = \frac{\zeta \overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{p}}{\rho}. \end{array} \right.$$

On a posé

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\hat{\mu}} + h\overrightarrow{e_h}, \quad \overrightarrow{W} = \overrightarrow{W_3} + W_h\overrightarrow{e_h}.$$

IV. Régularisation de Moser. 1. Prolongement cotangent (6)

Ces formules montrent que si $\vec{p}_1 = \vec{Om}_1$ et $\vec{p}_2 = \vec{Om}_2$ sont deux vecteurs colinéaires de $\vec{\mathcal{E}}$ tels que

$$\vec{Om}_1 \cdot \vec{Om}_2 = -\zeta \rho^2 ,$$

leurs images, par la projection stéréographique inverse, sont deux points M_1 et M_2 symétriques l'un de l'autre par rapport à O .

IV. Régularisation de Moser. 1. Prolongement cotangent (6)

Ces formules montrent que si $\vec{p}_1 = \overrightarrow{Om_1}$ et $\vec{p}_2 = \overrightarrow{Om_2}$ sont deux vecteurs colinéaires de $\vec{\mathcal{E}}$ tels que

$$\overrightarrow{Om_1} \cdot \overrightarrow{Om_2} = -\zeta \rho^2,$$

leurs images, par la projection stéréographique inverse, sont deux points M_1 et M_2 symétriques l'un de l'autre par rapport à O .

Rappelons que si une ligne droite passant par O coupe l'hodographe d'un mouvement képlérien en deux points m_1 et m_2 , $\overrightarrow{Om_1} \cdot \overrightarrow{Om_2}$ est la puissance de O par rapport à l'hodographe, et est égal à $2mE$, où E est l'énergie du mouvement.

IV. Régularisation de Moser. 2. Prolongement cotangent (7)

Cela prouve que la projection stéréographique inverse applique les hodographes des mouvements d'énergie $-\frac{\zeta\rho^2}{2m}$ sur des courbes tracées sur la quadrique Q_ρ , admettant O pour centre de symétrie. Ces courbes sont

IV. Régularisation de Moser. 2. Prolongement cotangent (7)

Cela prouve que la projection stéréographique inverse applique les hodographes des mouvements d'énergie $-\frac{\zeta\rho^2}{2m}$ sur des courbes tracées sur la quadrique Q_ρ , admettant O pour centre de symétrie. Ces courbes sont

• des grands cercles de la sphère Q_ρ si $\zeta = 1$,

IV. Régularisation de Moser. 2. Prolongement cotangent (7)

Cela prouve que la projection stéréographique inverse applique les hodographes des mouvements d'énergie $-\frac{\zeta\rho^2}{2m}$ sur des courbes tracées sur la quadrique Q_ρ , admettant O pour centre de symétrie. Ces courbes sont

- des grands cercles de la sphère Q_ρ si $\zeta = 1$,
- de grandes hyperboles de l'hyperboloïde Q_ρ si $\zeta = -1$. Le nom "grande hyperbole" est employé par analogie avec "grand cercle", pour désigner l'intersections de Q_ρ avec un plan passant par son centre de symétrie O .

IV. Régularisation de Moser. 2. Prolongement cotangent $s(8)$

Nous voyons donc que le prolongement cotangent S_ρ^{-1} de la projection stéréographique inverse sur la quadrique Q_ρ est

particulièrement adaptée aux mouvements d'énergie $E = -\frac{\zeta\rho^2}{2m}$,

car les hodographes de ces mouvements sont appliqués sur des grands cercles, ou des grandes hyperboles, de la quadrique Q_ρ . Les hodographes de mouvements d'énergie de valeurs autres sont appliqués sur des cercles, ou des hyperboles, qui ne sont pas des grands cercles, ou de grandes hyperboles.

IV. Régularisation de Moser. 2. Prolongement cotangent (9)

On a défini $S_\rho : T^*(Q_\rho \setminus \{N\}) \rightarrow T^*\mathcal{E}$ de manière telle que

$$(S_\rho)^*(\overrightarrow{r} \cdot d\overrightarrow{p}) = \overrightarrow{W} \cdot d\overrightarrow{OM}.$$

Puisque la forme symplectique de $T^*\mathcal{E}$ est $d(\overrightarrow{p} \cdot d\overrightarrow{r})$ et que celle de $T^*(Q_\rho \setminus \{N\})$ est $d(\overrightarrow{W} \cdot d\overrightarrow{OM})$, l'application S_ρ est un difféomorphisme *anti-symplectique*, non un difféomorphisme symplectique.

IV. Régularisation de Moser. 2. Prolongement cotangent (9)

On a défini $S_\rho : T^*(Q_\rho \setminus \{N\}) \rightarrow T^*\mathcal{E}$ de manière telle que

$$(S_\rho)^*(\vec{r} \cdot d\vec{p}) = \vec{W} \cdot d\vec{OM}.$$

Puisque la forme symplectique de $T^*\mathcal{E}$ est $d(\vec{p} \cdot d\vec{r})$ et que celle de $T^*(Q_\rho \setminus \{N\})$ est $d(\vec{W} \cdot d\vec{OM})$, l'application S_ρ est un difféomorphisme *anti-symplectique*, non un difféomorphisme symplectique.

Le hamiltonien transformé $(S_\rho)^*E = E \circ S_\rho$ est

$$E \circ S_\rho = \frac{-\zeta\rho^2}{2m} + \frac{\zeta\rho^3}{m(\rho - h)\|\vec{W}\|} \left(\|\vec{W}\| - \frac{km^2}{\rho^2} \right).$$

Puisque, lorsque $\zeta = -1$, le vecteur à 4 composantes \vec{W} est de genre espace, on a posé

$$\|\vec{W}\| = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2 + \zeta W_h^2}.$$

IV. Régularisation de Moser. 2. Prolongement cotangent (10)

Ce résultat prouve que lorsqu'on se restreint au niveau

d'énergie $E = -\frac{\zeta\rho^2}{2m}$, S_ρ^{-1} transforme le champ de vecteurs

hamiltonien du problème de Kepler en un champ conformément hamiltonien sur $T^*(Q_\rho \setminus \{N\})$ moins la section nulle, de

hamiltonien $\|\vec{W}\|$ et de facteur conforme $\frac{\zeta\rho^3}{m(\rho - h)\|\vec{W}\|}$.

IV. Régularisation de Moser. 2. Prolongement cotangent (10)

Ce résultat prouve que lorsqu'on se restreint au niveau

d'énergie $E = -\frac{\zeta\rho^2}{2m}$, S_ρ^{-1} transforme le champ de vecteurs

hamiltonien du problème de Kepler en un champ conformément hamiltonien sur $T^*(Q_\rho \setminus \{N\})$ moins la section nulle, de

hamiltonien $\|\vec{W}\|$ et de facteur conforme $\frac{\zeta\rho^3}{m(\rho-h)\|\vec{W}\|}$.

Par suite, l'ensemble des symétries infinitésimales du problème de Kepler, restreint soit aux énergies positives, soit aux énergies négatives, est identique à celui d'un champ hamiltonien sur $T^*(Q_\rho \setminus \{N\})$ moins la section nulle, de hamiltonien $\|\vec{W}\|$. C'est

- $so(4)$ pour les énergies négatives,
- $so(3, 1)$ pour les énergies positives.

V. Réinterprétation des résultats de Moser. 1. L'application S

Le principal inconvénient de la méthode de régularisation de Moser est qu'elle traite séparément chaque niveau d'énergie. Cet inconvénient peut être partiellement contourné.

V. Réinterprétation des résultats de Moser. 1. L'application S

Le principal inconvénient de la méthode de régularisation de Moser est qu'elle traite séparément chaque niveau d'énergie. Cet inconvénient peut être partiellement contourné.

Considérons la quadrique Q_ρ , d'équation

$$h^2 + \zeta(x^2 + y^2 + z^2) = \zeta\rho^2,$$

où ρ peut prendre n'importe quelle valeur positive, et soit Q_R la quadrique d'équation

$$h^2 + \zeta(x^2 + y^2 + z^2) = \zeta R^2,$$

où R est une quantité positive fixée. À chaque point $M_R \in Q_R$, on associe le point $M_\rho \in Q_\rho$ tel que

$$\overrightarrow{OM_\rho} = \frac{\rho}{R} \overrightarrow{OM_R}.$$

V. Réinterprétation des résultats de Moser. 1. L'application S (2)

On prolonge ce difféomorphisme $Q_R \mapsto Q_\rho$ aux fibrés cotangents, et on obtient un difféomorphisme symplectique $\mathcal{T}_\rho : T^*Q_R \rightarrow T^*Q_\rho$. Ce difféomorphisme symplectique associe à chaque couple $(M_R, \overrightarrow{W}_R)$ d'un point $M_R \in Q_R$ et d'un vecteur \overrightarrow{W}_R tangent à Q_R en ce point, le couple $(M_\rho, \overrightarrow{W}_\rho)$ d'un point $M_\rho \in Q_\rho$ et d'un vecteur \overrightarrow{W}_ρ tangent à Q_ρ en ce point :

$$\overrightarrow{OM}_\rho = \frac{\rho}{R} \overrightarrow{OM}_R, \quad \overrightarrow{W}_\rho = \frac{R}{\rho} \overrightarrow{W}_R.$$

V. Réinterprétation des résultats de Moser. 1. L'application S (2)

On prolonge ce difféomorphisme $Q_R \mapsto Q_\rho$ aux fibrés cotangents, et on obtient un difféomorphisme symplectique $\mathcal{T}_\rho : T^*Q_R \rightarrow T^*Q_\rho$. Ce difféomorphisme symplectique associe à chaque couple $(M_R, \overrightarrow{W}_R)$ d'un point $M_R \in Q_R$ et d'un vecteur \overrightarrow{W}_R tangent à Q_R en ce point, le couple $(M_\rho, \overrightarrow{W}_\rho)$ d'un point $M_\rho \in Q_\rho$ et d'un vecteur \overrightarrow{W}_ρ tangent à Q_ρ en ce point :

$$\overrightarrow{OM}_\rho = \frac{\rho}{R} \overrightarrow{OM}_R, \quad \overrightarrow{W}_\rho = \frac{R}{\rho} \overrightarrow{W}_R.$$

Pour chaque $\rho > 0$, on compose le difféomorphisme symplectique $\mathcal{T}_\rho =: T^*Q_R \rightarrow T^*Q_\rho$ avec le difféomorphisme symplectique $S_\rho : T^*(Q_\rho \setminus \{N\}) \rightarrow T^*\mathcal{E}$ défini dans le paragraphe précédent.

V. Réinterprétation des résultats de Moser. 1. L'application S (3)

On obtient une famille, indexée par $\rho > 0$, de difféomorphismes symplectiques $S_{\rho,R} = S_{\rho} \circ \mathcal{T}_{\rho} : T^*(Q_R \setminus \{N_R\}) \rightarrow T^*\mathcal{E}$:

V. Réinterprétation des résultats de Moser. 1. L'application S (3)

On obtient une famille, indexée par $\rho > 0$, de difféomorphismes symplectiques $S_{\rho,R} = S_{\rho} \circ \mathcal{T}_{\rho} : T^*(Q_R \setminus \{N_R\}) \rightarrow T^*\mathcal{E}$:

$$\begin{cases} \vec{p} = \frac{\rho}{R - h_R} \overrightarrow{O\mu_R}, & \text{avec } h_R^2 + \zeta \|\overrightarrow{O\mu_R}\|^2 = R^2, \\ \vec{r} = \frac{R - h_R}{\rho} \overrightarrow{W_{3R}} + \frac{W_{hR}}{\rho} \overrightarrow{O\mu_R}, \end{cases}$$

où on a posé

$$\overrightarrow{OM_R} = \overrightarrow{O\mu_R} + h_R \vec{e}_h, \quad \overrightarrow{W_R} = \overrightarrow{W_{3R}} + W_{hR} \vec{e}_h.$$

V. Réinterprétation des résultats de Moser. 1. L'application S (4)

Les formules pour les transformations inverses sont

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{O\mu_R} = \frac{2R\rho}{\rho^2 + \zeta p^2} \overrightarrow{p}, \\ h_R = R \frac{p^2 - \zeta \rho^2}{p^2 + \zeta \rho^2}, \quad \text{avec } p = \|\overrightarrow{p}\| = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}, \\ \overrightarrow{W_{3R}} = \frac{\rho^2 + \zeta p^2}{2R\rho} \overrightarrow{r} - \frac{\zeta \overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{p}}{R\rho} \overrightarrow{p}, \\ W_{hR} = \frac{\zeta \overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{p}}{R}. \end{array} \right.$$

Comme ci-dessus on a posé

$$\overrightarrow{OM_R} = \overrightarrow{O\mu_R} + h_R \overrightarrow{e_h}, \quad \overrightarrow{W_R} = \overrightarrow{W_{3R}} + W_{hR} \overrightarrow{e_h}.$$

V. Réinterprétation des résultats de Moser. 1. L'application S (5)

Le difféomorphisme $S_{\rho,R}^{-1}$ applique le sous-ensemble de $T^*\mathcal{E}$ sur lequel l'énergie est $E(\vec{r}, \vec{p}) = -\frac{\zeta\rho^2}{2m}$ dans le sous-ensemble de T^*Q_R sur lequel $\|\vec{W}_R\| = \frac{km^2}{R\rho}$.

V. Réinterprétation des résultats de Moser. 1. L'application S (5)

Le difféomorphisme $S_{\rho,R}^{-1}$ applique le sous-ensemble de $T^*\mathcal{E}$ sur lequel l'énergie est $E(\vec{r}, \vec{p}) = -\frac{\zeta\rho^2}{2m}$ dans le sous-ensemble de T^*Q_R sur lequel $\|\vec{W}_R\| = \frac{km^2}{R\rho}$.

Par suite, si ρ_1 and ρ_2 sont deux valeurs distinctes possibles de ρ , les images par $S_{\rho_1}^{-1}$ du niveau d'énergie $E_1(\vec{r}, \vec{p}) = -\frac{\zeta\rho_1^2}{2m}$, et par $S_{\rho_2}^{-1}$ du niveau d'énergie $E_2(\vec{r}, \vec{p}) = -\frac{\zeta\rho_2^2}{2m}$, **sont disjointes.**

V. Réinterprétation des résultats de Moser. 1. L'application S (6)

En restreignant chaque application $S_{\rho,R}^{-1}$ au sous-ensemble de $T^*\mathcal{E}$ sur lequel l'énergie est $E(\vec{r}, \vec{p}) = -\frac{\zeta\rho^2}{2m}$, et en collant ensemble les applications ainsi restreintes, pour toutes les valeurs possibles de ρ , on obtient un difféomorphisme unique S^{-1} du fibré cotangent $T^*\mathcal{E}$ *moins la section nulle* sur $T^*(Q_R \setminus \{N_R\})$ *moins la section nulle*.

V. Réinterprétation des résultats de Moser. 1. L'application S (6)

En restreignant chaque application $S_{\rho,R}^{-1}$ au sous-ensemble de $T^*\mathcal{E}$ sur lequel l'énergie est $E(\vec{r}, \vec{p}) = -\frac{\zeta\rho^2}{2m}$, et en collant ensemble les applications ainsi restreintes, pour toutes les valeurs possibles de ρ , on obtient un difféomorphisme unique S^{-1} du fibré cotangent $T^*\mathcal{E}$ *moins la section nulle* sur $T^*(Q_R \setminus \{N_R\})$ *moins la section nulle*.

Le difféomorphisme S , obtenu en recollant des morceaux de difféomorphismes symplectiques $S_{\rho,R}$ pour toutes les valeurs possibles de ρ , *n'est plus symplectique !*

V. Réinterprétation des résultats de Moser. 1. L'application S (7)

Le difféomorphisme S^{-1} est donné par les formules, dans lesquelles nous n'écrivons plus l'indice R ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{O}_{\mu} = \zeta \frac{R \sqrt{\zeta r (2m^2 k - rp^2)}}{m^2 k} \vec{p}, \\ h = \frac{R(rp^2 - m^2 k)}{m^2 k}, \\ \vec{W}_3 = \zeta \frac{m^2 k \vec{r} - r(\vec{r} \cdot \vec{p}) \vec{p}}{R \sqrt{\zeta r (2m^2 k - rp^2)}}, \\ W_h = \zeta \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{R}. \end{array} \right.$$

On a posé

$$\vec{OM} = \vec{O}_{\mu} + h \vec{e}_h, \quad \vec{W} = \vec{W}_3 + W_h \vec{e}_h.$$

V. Réinterprétation des résultats de Moser. 2. Le hamiltonien

Le hamiltonien transformé $(S^{-1})^* E = E \circ S$ est

$$H = E \circ S = -\frac{\zeta k^2 m^3}{2R^2} \frac{1}{\|\vec{W}\|^2}.$$

V. Réinterprétation des résultats de Moser. 2. Le hamiltonien

Le hamiltonien transformé $(S^{-1})^* E = E \circ S$ est

$$H = E \circ S = -\frac{\zeta k^2 m^3}{2R^2} \frac{1}{\|\vec{W}\|^2}.$$

Soit \mathcal{X}_E le champ de vecteurs hamiltonien sur $T^*(\mathcal{E} \setminus \{0\})$ de hamiltonien E , c'est à dire le champ de vecteurs hamiltonien du problème de Kepler, et soit \mathcal{X}_H le champ de vecteurs hamiltonien, sur T^*Q_R *moins la section nulle*, dont le hamiltonien est H de la *formule ci-dessus*. Après quelques calculs on arrive à

$$(S^{-1})_*(\mathcal{X}_E) = g\mathcal{X}_H$$

où g est une fonction différentiable définie sur un ouvert dense de T^*Q_R *moins la section nulle*.

V. Réinterprétation des résultats de Moser. 3. Facteur conforme

On a prouvé que S^{-1} applique le champ de vecteurs hamiltonien du problème de Kepler sur un champ de vecteurs *conformément hamiltonien*.

V. Réinterprétation des résultats de Moser. 3. Facteur conforme

On a prouvé que S^{-1} applique le champ de vecteurs hamiltonien du problème de Kepler sur un champ de vecteurs *conformément hamiltonien*.

Le hamiltonien H et le facteur conforme g sont

$$H = E \circ S = -\frac{\zeta k^2 m^3}{2R^2} \frac{1}{\|\vec{W}\|^2}, \quad g = \frac{R}{h - R}.$$

V. Réinterprétation des résultats de Moser. 3. Facteur conforme

On a prouvé que S^{-1} applique le champ de vecteurs hamiltonien du problème de Kepler sur un champ de vecteurs *conformément hamiltonien*.

Le hamiltonien H et le facteur conforme g sont

$$H = E \circ S = -\frac{\zeta k^2 m^3}{2R^2} \frac{1}{\|\vec{W}\|^2}, \quad g = \frac{R}{h - R}.$$

Le facteur conforme peut aussi s'exprimer sous la forme

$$g = -\zeta \frac{R^2 \|\vec{W}\|^2}{km^2} S^* \left(\frac{1}{r} \right),$$

qui est en rapport avec le changement de variable indépendante de Levi-Civita du paragraphe 3.

V. Réinterprétation des résultats de Moser. 4. Le flot de H

Le facteur conforme g devient singulier pour $h = R$, c'est-à-dire sur *l'espace cotangent à la quadrique Q à son pôle nord N* . Par contre le hamiltonien H est différentiable *sur tout le fibré cotangent T^*Q moins la section nulle*, désigné par T^*Q^0 . Le champ de vecteurs hamiltonien associé \mathcal{X}_H est *complet* : ses solutions maximales sont définies pour toutes les valeurs de la variable indépendante s (qui n'est plus le temps). Son flot $\Psi_{\mathcal{X}_H} : \mathbb{R} \times T^*Q^0 \rightarrow T^*Q^0$ est facile à calculer :

$$\Psi_{\mathcal{X}_H} \left(s, \left(\overrightarrow{OM(0)}, \overrightarrow{W(0)} \right) \right) = \left(\overrightarrow{OM(s)}, \overrightarrow{W(s)} \right) ,$$

et s'exprime de deux manières légèrement différentes, selon que $\zeta = 1$ (énergie négative) ou que $\zeta = -1$ (énergie positive). Remarquer que $\|\overrightarrow{W}\|$ est intégrale première de \mathcal{X}_H .

V. Réinterprétation des résultats de Moser. 4. Le flot de H (2)

- Pour $\zeta = 1$ (énergie négative)

$$\overrightarrow{OM}(s) = \cos(\lambda s) \overrightarrow{OM}(0) + \frac{R}{\|\overrightarrow{W}(0)\|} \sin(\lambda s) \overrightarrow{W}(0),$$

$$\overrightarrow{W}(s) = -\frac{\|\overrightarrow{W}(0)\|}{R} \sin(\lambda s) \overrightarrow{OM}(0) + \cos(\lambda s) \overrightarrow{W}(0).$$

V. Réinterprétation des résultats de Moser. 4. Le flot de H (2)

- Pour $\zeta = 1$ (énergie négative)

$$\overrightarrow{OM}(s) = \cos(\lambda s) \overrightarrow{OM}(0) + \frac{R}{\|\overrightarrow{W}(0)\|} \sin(\lambda s) \overrightarrow{W}(0),$$

$$\overrightarrow{W}(s) = -\frac{\|\overrightarrow{W}(0)\|}{R} \sin(\lambda s) \overrightarrow{OM}(0) + \cos(\lambda s) \overrightarrow{W}(0).$$

- Pour $\zeta = -1$ (énergie positive)

$$\overrightarrow{OM}(s) = \cosh(\lambda s) \overrightarrow{OM}(0) - \frac{R}{\|\overrightarrow{W}(0)\|} \sinh(-\lambda s) \overrightarrow{W}(0),$$

$$\overrightarrow{W}(s) = -\frac{\|\overrightarrow{W}(0)\|}{R} \sinh(-\lambda s) \overrightarrow{OM}(0) + \cosh(\lambda s) \overrightarrow{W}(0).$$

On a posé $\lambda = \frac{k^2 m^3}{R^3 \|\overrightarrow{W}(0)\|^3}$.

V. Réinterprétation des résultats de Moser. 5. Difféo symplectique

L'image par S^{-1} du problème de Kepler est un champ de vecteurs conformément hamiltonien $g\mathcal{X}_H$ défini sur un ouvert dense de T^*Q^0 (en fait T^*Q^0 moins la fibre au dessus du pôle nord) dont le hamiltonien H est différentiable sur T^*Q^0 ; le champ hamiltonien correspondant \mathcal{X}_H est complet.

V. Réinterprétation des résultats de Moser. 5. Difféo symplectique

L'image par S^{-1} du problème de Kepler est un champ de vecteurs conformément hamiltonien $g\mathcal{X}_H$ défini sur un ouvert dense de T^*Q^0 (en fait T^*Q^0 moins la fibre au dessus du pôle nord) dont le hamiltonien H est différentiable sur T^*Q^0 ; le champ hamiltonien correspondant \mathcal{X}_H est complet.

De plus ce champ conformément hamiltonien relativement à la forme symplectique de T^*Q , est aussi hamiltonien, avec le même hamiltonien H , *relativement à l'image réciproque par S de la forme symplectique canonique de $T^*\mathcal{E}$.*

V. Réinterprétation des résultats de Moser. 5. Difféo symplectique

L'image par S^{-1} du problème de Kepler est un champ de vecteurs conformément hamiltonien $g\mathcal{X}_H$ défini sur un ouvert dense de T^*Q^0 (en fait T^*Q^0 moins la fibre au dessus du pôle nord) dont le hamiltonien H est différentiable sur T^*Q^0 ; le champ hamiltonien correspondant \mathcal{X}_H est complet.

De plus ce champ conformément hamiltonien relativement à la forme symplectique de T^*Q , est aussi hamiltonien, avec le même hamiltonien H , *relativement à l'image réciproque par S de la forme symplectique canonique de $T^*\mathcal{E}$.*

L'image réciproque par $(\text{id}_{\mathbb{R}}, S)$ de la fonction, définie sur $\mathbb{R} \times T^*(Q \setminus \{O\})$,

$$-\frac{1}{2E(\vec{p}, \vec{r})} (\vec{p} \cdot \vec{r} - 2E(\vec{p}, \vec{r}) t)$$

a toutes les propriétés de la fonction σ du paragraphe 2.

V. Réinterprétation des résultats de Moser. 5. Difféo symplectique

On peut donc appliquer le corollaire du théorème du paragraphe 2. Ce corollaire prouve qu'en composant le difféomorphisme symplectique S^{-1} avec le flot Ψ du champ de vecteurs hamiltonien \mathcal{X}_H , pour des valeurs convenablement choisies de la variable indépendante s , on obtient un *difféomorphisme symplectique* de l'espace des phases du problème de Kepler, restreint soit aux énergies négatives, soit aux énergies positives, sur un ouvert de T^*Q . L'expression de ce difféomorphisme symplectique est

$$(\vec{p}, \vec{r}) \mapsto \left(\overrightarrow{OM(s)}, \overrightarrow{W(s)} \right)$$

λ est la constante, et s la fonction de (\vec{p}, \vec{r}) :

$$\lambda = \frac{k^2 m^3}{R^3 \|\overrightarrow{W(0)}\|^3}, \quad s = -\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{2E(\vec{p}, \vec{r})}.$$

V. Réinterprétation des résultats de Moser. 5. Difféo symplectique

$(\overrightarrow{OM}(s), \overrightarrow{W}(s))$ s'exprime au moyen de $(\overrightarrow{OM}(0), \overrightarrow{W}(0))$ par

● Pour $\zeta = 1$ (énergie négative)

$$\overrightarrow{OM}(s) = \cos(\lambda s) \overrightarrow{OM}(0) + \frac{R}{\|\overrightarrow{W}(0)\|} \sin(\lambda s) \overrightarrow{W}(0),$$

$$\overrightarrow{W}(s) = -\frac{\|\overrightarrow{W}(0)\|}{R} \sin(\lambda s) \overrightarrow{OM}(0) + \cos(\lambda s) \overrightarrow{W}(0).$$

● Pour $\zeta = -1$ (énergie positive)

$$\overrightarrow{OM}(s) = \cosh(\lambda s) \overrightarrow{OM}(0) - \frac{R}{\|\overrightarrow{W}(0)\|} \sinh(-\lambda s) \overrightarrow{W}(0),$$

$$\overrightarrow{W}(s) = -\frac{\|\overrightarrow{W}(0)\|}{R} \sinh(-\lambda s) \overrightarrow{OM}(0) + \cosh(\lambda s) \overrightarrow{W}(0).$$

V. Réinterprétation des résultats de Moser. 5. Difféo symplectique

$(\overrightarrow{OM(0)}, \overrightarrow{W(0)})$ s'exprime au moyen de $(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{r})$ par

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{O\mu} = \zeta \frac{R\sqrt{\zeta r(2m^2k - rp^2)}}{m^2k} \overrightarrow{p}, \\ h = \frac{R(rp^2 - m^2k)}{m^2k}, \\ \overrightarrow{W_3} = \zeta \frac{m^2k \overrightarrow{r} - r(\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{p}) \overrightarrow{p}}{R\sqrt{\zeta r(2m^2k - rp^2)}}, \\ W_h = \zeta \frac{\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{p}}{R}. \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{OM(0)} = \overrightarrow{O\mu} + h\overrightarrow{e_h}, \quad \overrightarrow{W(0)} = \overrightarrow{W_3} + W_h\overrightarrow{e_h}.$$

Remerciements

Je remercie les organisateurs des *Deuxièmes journées sur les systèmes dynamiques et les équations différentielles*, à l'Université Badji Mokhtar, Annaba, de m'avoir invité à participer à cette rencontre.

Remerciements

Je remercie les organisateurs des *Deuxièmes journées sur les systèmes dynamiques et les équations différentielles*, à l'Université Badji Mokhtar, Annaba, de m'avoir invité à participer à cette rencontre.

Je dois beaucoup à mes collègues et amis Alain Albouy, Alain Guichardet, Alain Chenciner, Maylis Irigoyen, Jean-Pierre Marco, Alan Weinstein, pour des discussions stimulantes. De plus Alain Guichardet et Alain Albouy m'ont communiqué leurs brouillons non publiés traitant du problème de Kepler.

Remerciements

Je remercie les organisateurs des *Deuxièmes journées sur les systèmes dynamiques et les équations différentielles*, à l'Université Badji Mokhtar, Annaba, de m'avoir invité à participer à cette rencontre.

Je dois beaucoup à mes collègues et amis Alain Albouy, Alain Guichardet, Alain Chenciner, Maylis Irigoyen, Jean-Pierre Marco, Alan Weinstein, pour des discussions stimulantes. De plus Alain Guichardet et Alain Albouy m'ont communiqué leurs brouillons non publiés traitant du problème de Kepler.

Et grand merci à tous ceux qui ont eu la patience de m'écouter !

Bibliographie (1)

1. D. V. Anosov, *A note on the Kepler problem*, Journal of Dynamical and Control Systems, Vol. 8, No. 3, July 2002, 413–442.
2. V. Arnold, *Les méthodes mathématiques de la mécanique classique*. Éditions Mir, Moscou, 1974, traduction française 1976.
3. M. Bander and C. Itzykson, *Group theory and the hydrogen atom*, parts 1 and 2, Rev. Mod. Phys. 38 (1966), 330–345 and 346–358.
4. H. Bacry, H. Ruegg et J.-M. Souriau, *Dynamical groups and spherical potentials in classical mechanics*, Commun. math. phys. 3 (1966), 323–333.
5. E. A. Belbruno, *Two body motion under the inverse central force and equivalent geodesic flow*, Celest. Mech. 15 (1977), 467–476.

Bibliographie (2)

6. E. A. Belbruno, *Regularizations and geodesic flow*, in *Classical mechanics and Dynamical Systems*, (R. L. Devaney and Z. H. Nitecki, editors) Dekker, 1981, 1–11.
7. B. Cordani, *The Kepler problem*, Birkhäuser, Basel, 2003.
8. R.H. Cushman and J.J. Duistermaat, *A characterization of the Ligon–Schaaf regularization map*, *Comm. on Pure and Appl. Math.*, vol L, (1997), 773–787.
9. V. A. Fock, *Zur Theorie des Wasserstoffatoms*, *Zeitschrift für Physik* vol. 98 (1935), 145–154.
10. A. Guichardet, *Le problème de Kepler ; histoire et théorie*, Éditions de l'École Polytechnique, Paris, 2012.
11. V. Guillemin and S. Sternberg, *Variations on a theme by Kepler*, *American mathematical society colloquium publications* 42, 1990.

Bibliographie (3)

12. G. Györgyi, *Kepler's equation, Fock variables, Bacry's generators and Dirac brackets, parts I and II*, Il nuovo cimento vol. LIII A, no. 3, Febbraio 1968, 717–736 and vol. LXII A, n. 2, Luglio 1969, 449–474.
13. W.R. Hamilton, *The hodograph or a new method of expressing in symbolic language the Newtonian law of attraction*, Proc. Roy. Irish Acad., 3 (1846) 344–353. In Sir William Rowan Hamilton mathematical Works, vol. II, 287–294, Cambridge University Press, 1940.
14. P. Iglesias, *Symétries et moment*, Hermann, Paris, 2000.
15. H. Knörrer and E. Trubowitz, *Explicit symmetries of the Kepler Hamiltonian*, conference in honor of R. Cushman, 2007.
16. M. Kummer, *On the regularization of the Kepler problem*, Commun. Math. Phys. 84 (1982), 133–152.

Bibliographie (4)

17. P. Kustaaneimo and E. Stiefel, *Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularization*, J. Reine Angew. Math. 218 (1965), 204–219.
18. J.-L. Lagrange, *Sur la théorie générale de la variation des constantes arbitraires dans tous les problèmes de mécanique*. Mémoire lu le 13 mars 1809 à l'Institut de France. Dans *Œuvres de Lagrange*, volume IV, Gauthier-Villars, Paris, 1877.
19. T. Ligon and M. Schaaf, *On the global symmetry of the classical Kepler problem*, Rep. Math. Phys. 9 (1976), 281–300.
20. C.-M. Marle, *A property of conformally Hamiltonian vector fields ; application to the Kepler problem*, Journal of Geometric Mechanics, vol. 4, n. 2, June 2012, 181–206.
21. J.E. Marsden and A. Weinstein, *Reduction of symplectic manifolds with symmetry*, Reports on Mathematical Physics 5 (1974), 121–130.

Bibliographie (5)

22. J. Milnor, *On the Geometry of the Kepler problem*, Amer. Math. Monthly 90 (1983), 353–365.
23. J. Moser, *Regularization of Kepler's problem and the averaging method on a manifold*, Commun. pure appl. math. vol. 23 (1970), 609–636.
24. Yu. S. Osipov, *geometrical interpretation of Kepler's problem*, Uspekhi Mat. Nauk, 27, 2 (1972), P. 161.
25. Yu. S. Osipov, *The Kepler problem and geodesic flows in spaces of constant curvature*, Celest. mech. 16 (1977), 191–208.
26. G.E. Prince and C.J. Elizer, *On the Lie symmetries of the classical Kepler problem*, J. Phys. A Math. Gen. 14 (1981), 587–596.
27. J.-M. Souriau, *Structure des systèmes dynamiques*, Dunod, Paris 1969.

Bibliographie (6)

28. J.-M. Souriau, *Géométrie globale du problème à deux corps*, Modern developments in analytical mechanics. Accademia della Scienze di Torino, 1983, P. 369–418. Supplemento al vol. 117, Atti della Accademia della Scienze di Torino.
- 29 J. Waldvogel, *Quaternions and the perturbed Kepler problem*, Celestial mechanics and dynamical astronomy 95, 1–4 (2006), 201–212.

Appendice. Équation polaire de l'orbite

Calculons $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$:

$$\vec{L} = L\vec{e}_z = r \left(\frac{m^2 k}{L} + c \cos \theta \right) \vec{e}_z . \quad \text{On en déduit}$$

Appendice. Équation polaire de l'orbite

Calculons $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$:

$$\vec{L} = L\vec{e}_z = r \left(\frac{m^2 k}{L} + c \cos \theta \right) \vec{e}_z. \quad \text{On en déduit}$$

$$r = \frac{L^2}{m^2 k + Lc \cos \theta} = \frac{\Lambda}{1 + \varepsilon \cos \theta}, \quad \text{où nous avons posé}$$

$$\Lambda = \frac{L^2}{m^2 k}, \quad \varepsilon = \frac{Lc}{m^2 k}.$$

Appendice. Équation polaire de l'orbite

Calculons $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$:

$$\vec{L} = L\vec{e}_z = r \left(\frac{m^2 k}{L} + c \cos \theta \right) \vec{e}_z. \quad \text{On en déduit}$$

$$r = \frac{L^2}{m^2 k + Lc \cos \theta} = \frac{\Lambda}{1 + \varepsilon \cos \theta}, \quad \text{où nous avons posé}$$

$$\Lambda = \frac{L^2}{m^2 k}, \quad \varepsilon = \frac{Lc}{m^2 k}.$$

C'est l'équation polaire d'une conique, de foyer O et d'excentricité ε . Lorsque cette conique est une ellipse, c'est la *première loi de Kepler*. Puisque nous avons fait en sorte que L et c soient de même signe, nous avons $\varepsilon \geq 0$.

Appendice. Équation polaire de l'orbite (2)

L'orbite est

Appendice. Équation polaire de l'orbite (2)

L'orbite est

- un *cercle* si $\varepsilon = 0$,

Appendice. Équation polaire de l'orbite (2)

L'orbite est

- un *cercle* si $\varepsilon = 0$,
- une *ellipse* si $0 < \varepsilon < 1$,

Appendice. Équation polaire de l'orbite (2)

L'orbite est

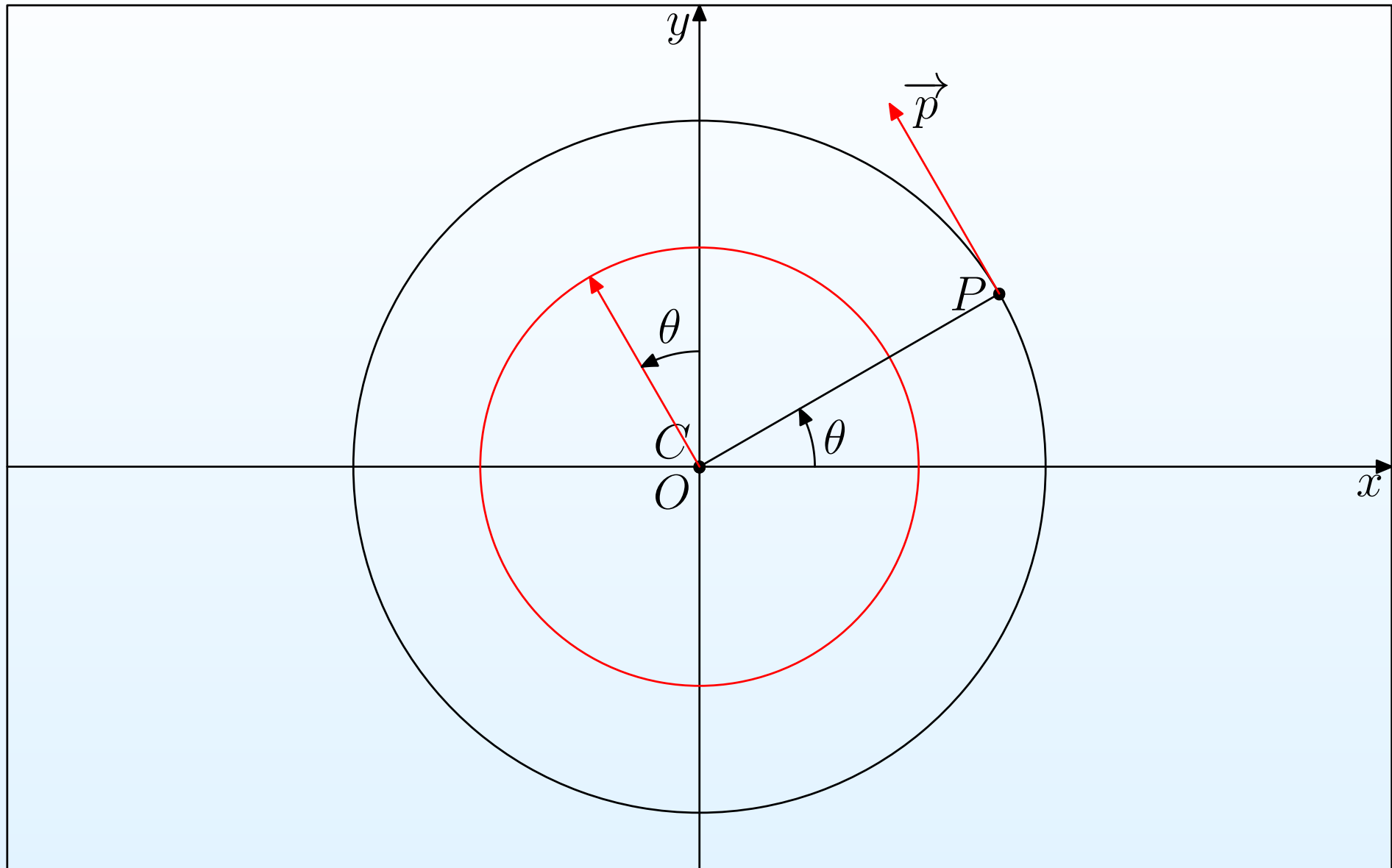
- un *cercle* si $\varepsilon = 0$,
- une *ellipse* si $0 < \varepsilon < 1$,
- une *parabole* si $\varepsilon = 1$,

Appendice. Équation polaire de l'orbite (2)

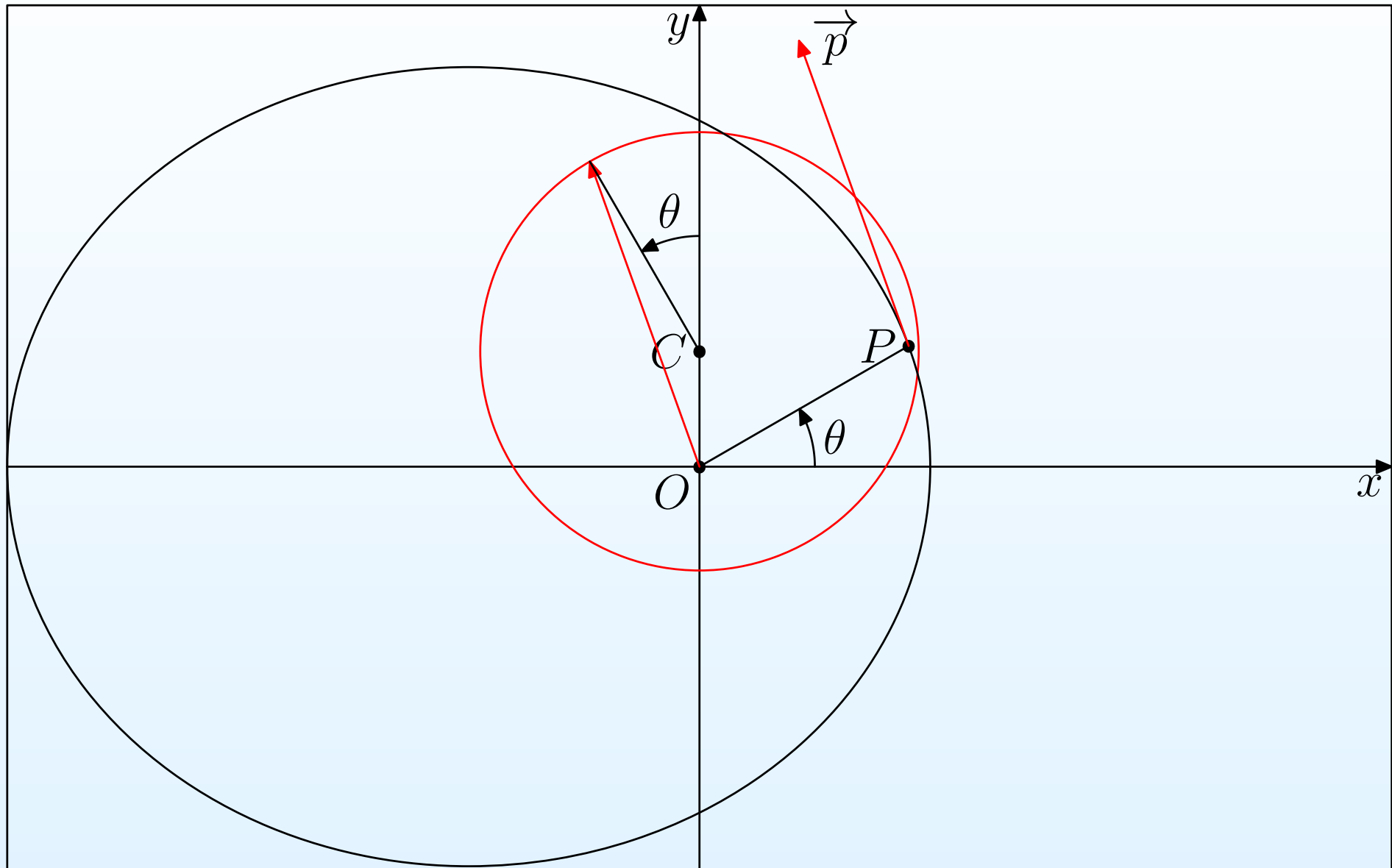
L'orbite est

- un *cercle* si $\varepsilon = 0$,
- une *ellipse* si $0 < \varepsilon < 1$,
- une *parabole* si $\varepsilon = 1$,
- une *hyperbole* (plus exactement une branche d'hyperbole) si $\varepsilon > 1$.

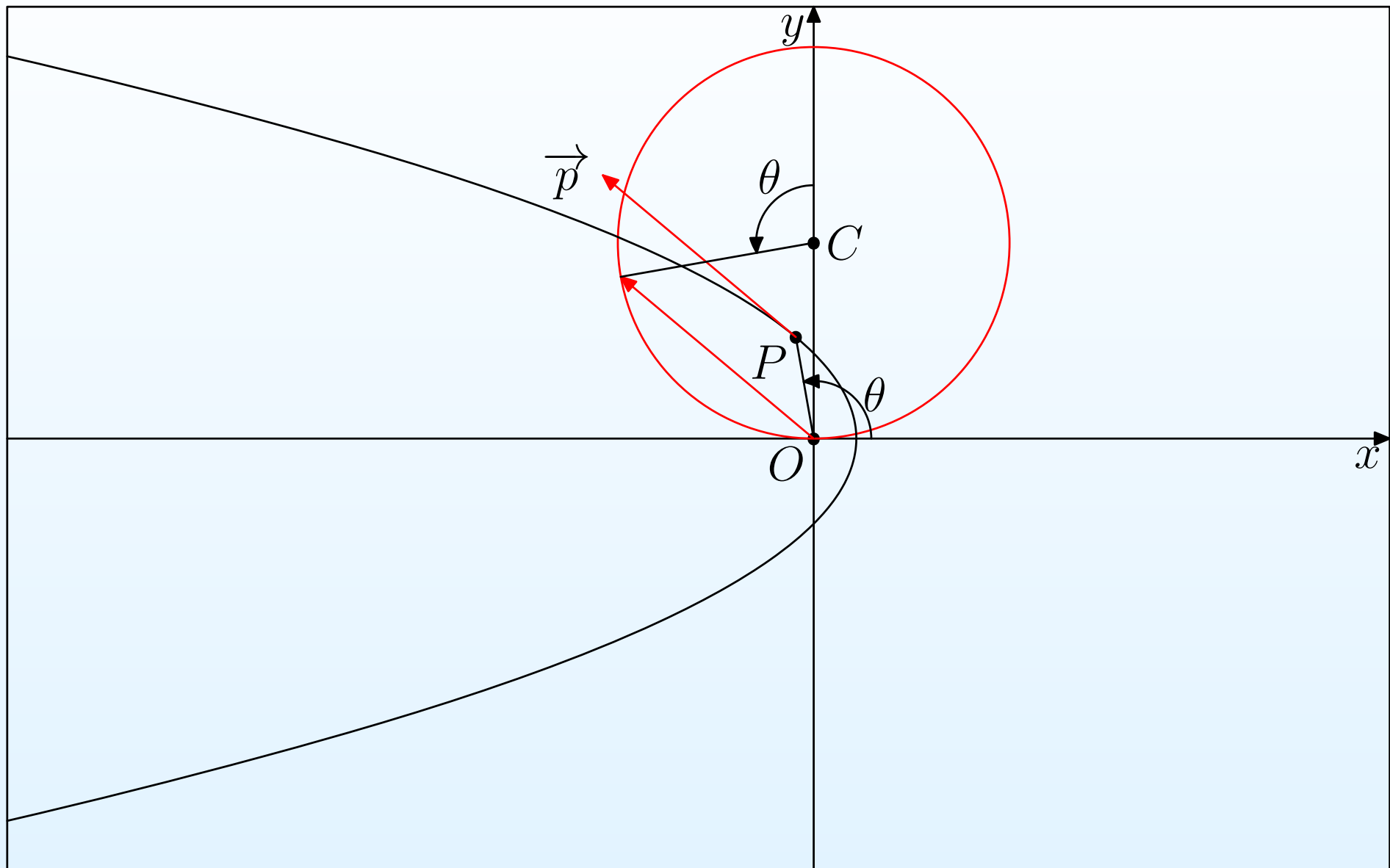
Appendice. Orbite et hodographe, $\varepsilon = 0$



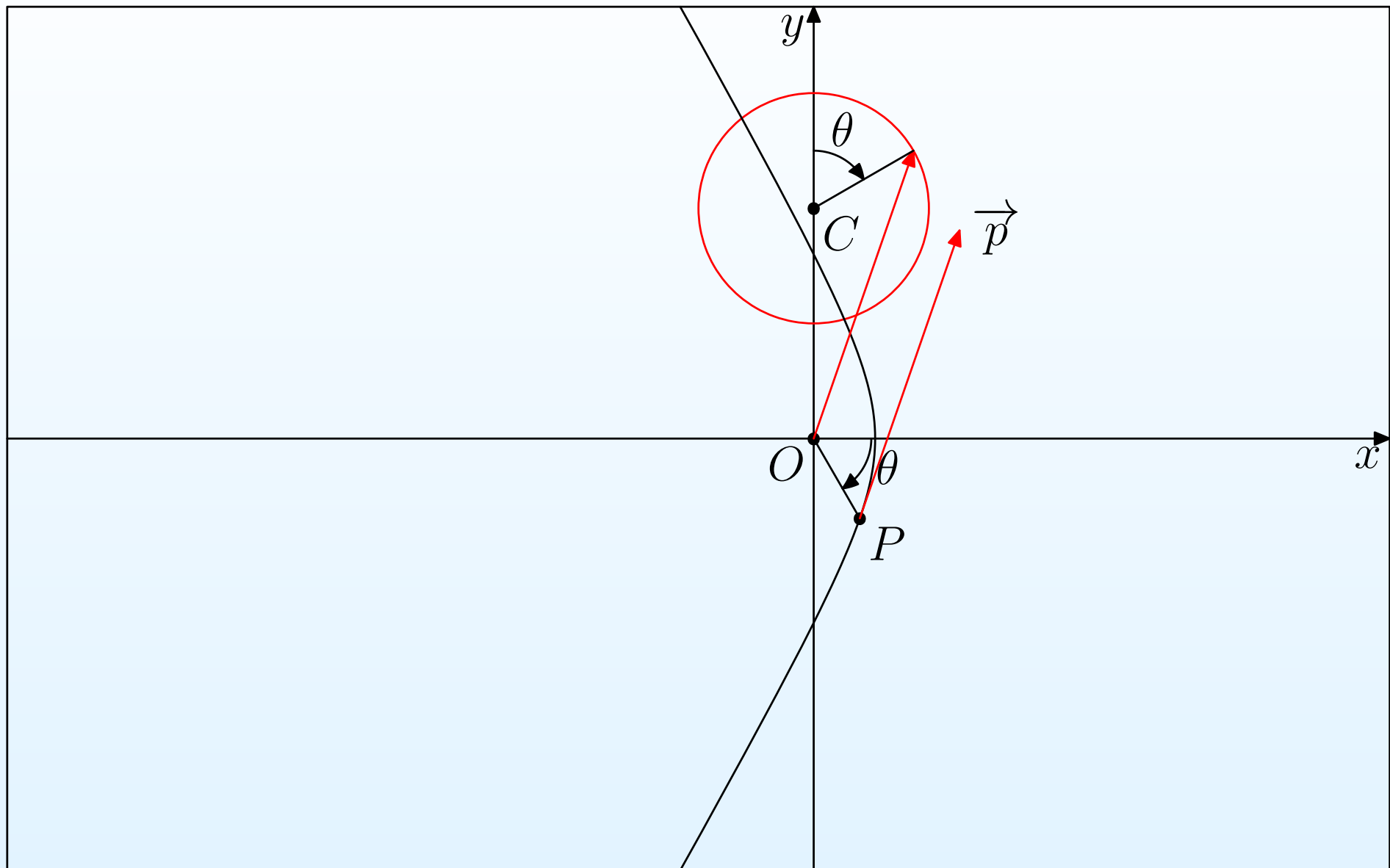
Appendice. Orbite et hodographe, $\varepsilon = 1/2$



Appendice. Orbite et hodographe, $\varepsilon = 1$



Appendice. Orbite et hodographe, $\varepsilon = 2$



Appendice. Mouvements singuliers

Si à l'instant initial $t = t_0$, $\overrightarrow{r}(t_0)$ et $\overrightarrow{p}(t_0)$ sont colinéaires, ils restent colinéaires pour toutes les valeurs du temps pour lesquelles le mouvement est défini. L'orbite est une partie d'une ligne droite passant par le centre attractif O . Sur cette ligne droite prise pour axe des abscisses, prenons O pour origine et choisissons l'orientation de manière qu'au temps t_0 , l'abscisse $x(t_0)$ du point mobile P soit > 0 . On résoud assez facilement les équations du mouvement en remarquant que l'énergie E est une intégrale première. Lorsque $E \neq 0$ il est commode d'utiliser le paramètre de Levi-Civita comme nouvelle variable indépendante. Les résultats s'expriment le plus simplement lorsque x et t sont donnés en fonction d'une nouvelle variable τ , choisie de manière telle que lorsque $\tau \rightarrow 0$, x et t tendent vers 0 tandis que p tend vers l'infini.

Appendice. Mouvements singuliers (2)

Pour $E = 0$,

$$x(\tau) = \frac{k\tau^2}{2}, \quad t(\tau) = \frac{k\tau^3}{6}.$$

Appendice. Mouvements singuliers (2)

Pour $E = 0$,

$$x(\tau) = \frac{k\tau^2}{2}, \quad t(\tau) = \frac{k\tau^3}{6}.$$

Pour $E < 0$,

$$x(\tau) = \frac{km}{-2E} \left(1 - \cos \left(\sqrt{\frac{-2E}{m}} \tau \right) \right),$$

$$t(\tau) = k \left(\frac{m}{-2E} \right)^{3/2} \left(\tau - \sin \left(\sqrt{\frac{-2E}{m}} \tau \right) \right).$$

Appendice. Mouvements singuliers (2)

Pour $E = 0$,

$$x(\tau) = \frac{k\tau^2}{2}, \quad t(\tau) = \frac{k\tau^3}{6}.$$

Pour $E < 0$,

$$x(\tau) = \frac{km}{-2E} \left(1 - \cos \left(\sqrt{\frac{-2E}{m}} \tau \right) \right),$$
$$t(\tau) = k \left(\frac{m}{-2E} \right)^{3/2} \left(\tau - \sin \left(\sqrt{\frac{-2E}{m}} \tau \right) \right).$$

Pour $E > 0$,

$$x(\tau) = \frac{km}{2E} \left(\cosh \left(\sqrt{\frac{2E}{m}} \tau \right) - 1 \right),$$
$$t(\tau) = k \left(\frac{m}{2E} \right)^{3/2} \left(\sinh \left(\sqrt{\frac{2E}{m}} \tau \right) - \tau \right).$$

Appendice. Mouvements d'énergie nulle

Pour les mouvements képlériens d'énergie nulle, on adapte la méthode de régularisation de Moser en remplaçant la projection stéréographique inverse par une inversion de pôle O et de rapport λ . Les formules donnant le prolongement cotangent de cette inversion sont

$$\begin{cases} \vec{p} = \frac{\lambda}{\|\vec{OM}\|^2} \vec{OM}, \\ \vec{r} = \frac{\|\vec{OM}\|^2}{\lambda} \vec{W} - \frac{2\vec{W} \cdot \vec{OM}}{\lambda} \vec{OM}. \end{cases}$$

La correspondance $(\vec{p}, \vec{r}) \mapsto (\vec{OM}, \vec{W})$ étant involutive,

$$\begin{cases} \vec{OM} = \frac{\lambda}{p^2} \vec{p}, \\ \vec{W} = \frac{p^2}{\lambda} \vec{r} - \frac{2\vec{r} \cdot \vec{p}}{\lambda} \vec{p}, \end{cases}$$

Appendice. Mouvements d'énergie nulle (2)

En notant S_0 le prolongement cotangent de l'inversion de pôle O et de rapport λ , nous obtenons l'expression du hamiltonien transformé :

$$E \circ S_0 = \frac{\lambda^2}{2m \|\vec{W}\| \|\vec{OM}\|^2} \left(\|\vec{W}\| - \frac{2m^2 k}{\lambda} \right).$$

Ici le vecteur \vec{W} a 3 composantes, c'est un vecteur de $\vec{\mathcal{E}}$, aussi nous avons posé

$$\|\vec{W}\| = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2}.$$

Appendice. Mouvements d'énergie nulle (3)

Ce résultat prouve que l'ensemble des symétries infinitésimales des mouvements d'énergie 0 du problème de Kepler est le même que l'ensemble des symétries infinitésimales du champ de vecteurs hamiltonien sur $T^*(\mathcal{E})$ moins la section nulle, dont le hamiltonien est $\|\vec{W}\|$.

Appendice. Mouvements d'énergie nulle (3)

Ce résultat prouve que l'ensemble des symétries infinitésimales des mouvements d'énergie 0 du problème de Kepler est le même que l'ensemble des symétries infinitésimales du champ de vecteurs hamiltonien sur $T^*(\mathcal{E})$ moins la section nulle, dont le hamiltonien est $\|\vec{W}\|$.

C'est donc l'algèbre de Lie $e(3)$ des déplacements infinitésimaux (rotations et translations) de l'espace affine euclidien \mathcal{E} , de dimension 3.