L’évolution de la notion d’Espace en Physique et en Mathématiques

de 1850 à 1930

Charles-Michel Marle

marle@math.jussieu.fr

Université Pierre et Marie Curie, Paris, France

Sommaire

État des lieux vers 1850

L'Espace des physiciens

Vers 1850 (et même jusqu'en 1905), pour les physiciens, l'Espace était l'espace absolu d'Isaac Newton (1642–1727): le cadre dans lequel se situent et évoluent, en fonction du Temps, tous les objets physiques. Newton le concevait comme un espace affine, euclidien (une fois choisie une unité de longueur), ayant une existence propre, indépendamment des objets qu'il contient. Les notions de repos et de mouvement avaient pour lui un caractère absolu: un objet physique est au repos si la position qu'il occupe dans l'espace ne se modifie pas au cours du temps; dans le cas contraire, cet objet est en mouvement.

R

État des lieux vers 1850 (2)

L'Espace des physiciens (suite)

On savait cependant que seuls les mouvements relatifs des objets physiques, les uns par rapport aux autres, peuvent être directement observés, et qu'aucune expérience de mécanique ne permet de distinguer entre en repère fixe (immobile dans l'espace absolu) et un repère (dit inertiel ou galiléen), en translation uniforme (à vitesse constante) dans l'espace absolu.

R

État des lieux vers 1850 (2)

L'Espace des physiciens (suite)

On savait cependant que seuls les mouvements relatifs des objets physiques, les uns par rapport aux autres, peuvent être directement observés, et qu'aucune expérience de mécanique ne permet de distinguer entre en repère fixe (immobile dans l'espace absolu) et un repère (dit inertiel ou galiléen), en translation uniforme (à vitesse constante) dans l'espace absolu.

L'existence d'un espace absolu a été contestée notamment par Ernst Mach (1838–1916) dans son livre, publié en 1863, “La mécanique, exposé historique et critique de son développement”.

R

État des lieux vers 1850 (3)

L'Espace des physiciens (suite)

En pratique, les mécaniciens choisissaient un référentiel approximativement inertiel et étudiaient le mouvement des objets physiques relativement à ce référentiel, comme si celui-ci était fixe.

R

État des lieux vers 1850 (4)

L'Espace des mathématiciens

R

État des lieux vers 1850 (4)

L'Espace des mathématiciens

Jusqu'à la découverte des géométries non euclidiennes, peu de mathématiciens avaient clairement pris conscience de la distinction qu'il convient de faire entre l'Espace physique dans lequel nous vivons, et les Espaces mathématiques qu'on peut imaginer et dont on peut faire une théorie exempte de contradictions: l'Espace était celui dont Euclide (environ 300 av. J.-C.– env. 275 av. J.-C.) avait étudié les propriétés dans ses "Éléments". Les principaux débats portaient sur l'indépendance et la cohérence des postulats admis par Euclide, en particulier le cinquième:

R

État des lieux vers 1850 (4)

L'Espace des mathématiciens

Jusqu'à la découverte des géométries non euclidiennes, peu de mathématiciens avaient clairement pris conscience de la distinction qu'il convient de faire entre l'Espace physique dans lequel nous vivons, et les Espaces mathématiques qu'on peut imaginer et dont on peut faire une théorie exempte de contradictions: l'Espace était celui dont Euclide (environ 300 av. J.-C.– env. 275 av. J.-C.) avait étudié les propriétés dans ses “Éléments”. Les principaux débats portaient sur l'indépendance et la cohérence des postulats admis par Euclide, en particulier le cinquième:

Par un point donné on peut faire passer une unique droite parallèle à une droite donnée.

R

État des lieux vers 1850 (5)

L'Espace des mathématiciens (suite)

Adrien-Marie Legendre (1752–1833) publie ses Éléments de Géométrie en 1794. Préoccupé par le cinquième postulat, il développe une géométrie en substituant à celui-ci l'axiome:

La somme des angles d'un triangle est inférieure ou égale à deux droits.

Il montre que si l'égalité est atteinte pour un triangle, elle l'est pour tous les triangles et que c'est équivalent au cinquième postulat d'Euclide.

R

État des lieux vers 1850 (6)

L’Espace des mathématiciens (suite)

János Bolyai (1802–1860) et Nikolaï Ivanovitch Lobatchevski (1792–1856) ont, indépendamment et à peu près simultanément (vers 1823), développé une géométrie, aujourd’hui appelée géométrie hyperbolique, dans laquelle, par un point d’un plan on peut faire passer une infinité de droites distinctes de ce plan, parallèles à une droite donnée du plan (en ce sens qu’elles ne la rencontrent pas). La possibilité de développer une telle géométrie était probablement déjà connue par Carl Friedrich Gauss (1777-1855), et jugée par lui peu intéressante, car il a dissuadé Bolyai de publier ses recherches; celui-ci ne les a publiées que comme appendice à une réédition du traité de géométrie de son père. Lobatchevski a publié son mémoire en 1829.

État des lieux vers 1850 (7)

L'Espace des mathématiciens (suite)

En 1868, Eugenio Beltrami (1835–1900) construit, dans le cadre de la géométrie euclidienne classique, un modèle de géométrie hyperbolique. Il prouve ainsi que la nouvelle géométrie hyperbolique est aussi cohérente que la géométrie euclidienne classique.

État des lieux vers 1850 (7)

L'Espace des mathématiciens (suite)

En 1868, Eugenio Beltrami (1835–1900) construit, dans le cadre de la géométrie euclidienne classique, un modèle de géométrie hyperbolique. Il prouve ainsi que la nouvelle géométrie hyperbolique est aussi cohérente que la géométrie euclidienne classique.

Christian Felix Klein (1849–1925) et Jules Henri Poincaré (1854–1912) ont construit des modèles analogues de géométrie hyperbolique.

État des lieux vers 1850 (7)

L'Espace des mathématiciens (suite)

En 1868, Eugenio Beltrami (1835–1900) construit, dans le cadre de la géométrie euclidienne classique, un modèle de géométrie hyperbolique. Il prouve ainsi que la nouvelle géométrie hyperbolique est aussi cohérente que la géométrie euclidienne classique.

Christian Felix Klein (1849–1925) et Jules Henri Poincaré (1854–1912) ont construit des modèles analogues de géométrie hyperbolique.

Ce n'est qu'en 1899 qu'une présentation axiomatique rigoureuse de la géométrie sera donnée par David Hilbert (1862–1943), qui prouve que la consistance des axiomes de la géométrie équivaut à celle des axiomes de l'arithmétique.

État des lieux vers 1850 (8)

L'Espace des mathématiciens (suite)

Par ailleurs, indépendamment de ces réflexions sur les axiomes de la géométrie, certains mathématiciens avaient introduit diverses généralisations de la notion d'espace. Jean-Victor Poncelet (1788–1867), préoccupé par les propriétés projectives des figures, avait introduit, entre 1817 et 1822, la droite de l'infini en géométrie plane, ainsi que la dualité échangeant droites et points (transformations par polaires réciproques). Il n'hésitait pas non plus à considérer des points imaginaires sans cependant en donner une définition rigoureuse. Ses intuitions géniales sont à l'origine du renouveau de ce que l'on appelle aujourd'hui la géométrie projective.

R

Les deux mémoires de Riemann

Les idées présentées par Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) dans sa dissertation inaugurale de 1851, “Théorie générale des fonctions d’une grandeur variable complexe”, et surtout dans le mémoire “Les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie”, présenté oralement en 1854 à l’occasion de ses épreuves d’admission à la Faculté philosophique de Göttingue, ont très profondément modifié notre conception de l’Espace.

Les deux mémoires de Riemann

Les idées présentées par Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) dans sa dissertation inaugurale de 1851, “Théorie générale des fonctions d’une grandeur variable complexe”, et surtout dans le mémoire “Les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie”, présenté oralement en 1854 à l’occasion de ses épreuves d’admission à la Faculté philosophique de Göttingue, ont très profondément modifié notre conception de l’Espace.

Dans sa dissertation inaugurale de 1851, il introduit ce qu’on appelle aujourd’hui les surfaces de Riemann. Son but était de transformer en fonctions univoques les fonctions multivoques rencontrées en Analyse complexe. De ce fait, il est amené à considérer des fonctions définies sur un ensemble dont la topologie est plus compliquée que celle d’un ouvert du plan complexe.

Les deux mémoires de Riemann (2)

Riemann observe aussi qu’on doit distinguer deux étapes dans la construction d’un espace complexe: le choix d’une topologie, puis le choix d’une structure complexe. Il utilisera cette observation, sous une autre forme, dans son mémoire de 1854, en munissant l’Espace d’une topologie avant de définir ses propriétés métriques.

R

Les deux mémoires de Riemann (2)

Riemann observe aussi qu'on doit distinguer deux étapes dans la construction d'un espace complexe: le choix d'une topologie, puis le choix d'une structure complexe. Il utilisera cette observation, sous une autre forme, dans son mémoire de 1854, en munissant l'Espace d'une topologie avant de définir ses propriétés métriques.

Son mémoire de 1854 sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie introduit un point de vue tout à fait nouveau: alors que tous ses prédécesseurs fondaient la géométrie sur des axiomes globaux, il affirme qu'il faut, au contraire, partir des propriétés infinitésimales de l'Espace, et que celles-ci, avec la topologie, déterminent alors les propriétés globales.

R

Les deux mémoires de Riemann (3)

Riemann se place d'emblée sur variété de dimension n. Il explique comment définir cette notion de dimension et comment construire, de proche en proche, des variétés de dimensions croissantes, ou au contraire comment ramener l'étude d'une variété de dimension n à l'étude de variétés de dimension $n-1$, en considérant les ensembles de niveau d'une fonction non constante définie sur cette variété.

Les deux mémoires de Riemann (3)

Riemann se place d'emblée sur variété de dimension n. Il explique comment définir cette notion de dimension et comment construire, de proche en proche, des variétés de dimensions croissantes, ou au contraire comment ramener l'étude d'une variété de dimension n à l'étude de variétés de dimension $n-1$, en considérant les ensembles de niveau d'une fonction non constante définie sur cette variété.

Afin de déterminer les propriétés métriques, Riemann définit ce que l'on appelle aujourd'hui une structure riemannienne: en chaque point x de la variété, la distance de ce point à un autre point infiniment voisin $x + dx$ est donnée par la racine carrée d'une forme quadratique en les composantes $dx^1, \ldots, dx^n$ de dx, définie positive, dont les coefficients g_{ij} dépendent du point x considéré:

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}(x^1, \ldots, x^n) dx^i \, dx^j.$$

Les deux mémoires de Riemann (4)

Riemann considère aussi d'autres possibilités: racine quatrième d'un polynôme homogène de degré 4 en les composantes de dx, et plus généralement fonction homogène de degré 1 en ces composantes. C'est ce qui est appelé aujourd'hui structure de Finsler, en hommage au mathématicien Paul Finsler (1894–1970).

R

Les deux mémoires de Riemann (4)

Riemann considère aussi d'autres possibilités: racine quatrième d'un polynôme homogène de degré 4 en les composantes de dx, et plus généralement fonction homogène de degré 1 en ces composantes. C'est ce qui est appelé aujourd'hui structure de Finsler, en hommage au mathématicien Paul Finsler (1894–1970).

En chaque point, Riemann introduit des invariants, appelés aujourd'hui les courbures sectionnelles, qui ne dépendent pas du choix des coordonnées locales. Au nombre de $n(n-1)/2$, ils correspondent aux différentes directions indépendantes que peut avoir un plan passant par ce point.

R

Les deux mémoires de Riemann (5)

Lorsque la courbure sectionnelle est constante, c'est-à-dire ne dépend ni du point considéré ni de la direction de plan passant par ce point, l'approche de Riemann permet de retrouver:

R

Les deux mémoires de Riemann (5)

Lorsque la courbure sectionnelle est constante, c'est-à-dire ne dépend ni du point considéré ni de la direction de plan passant par ce point, l'approche de Riemann permet de retrouver:

- pour une courbure nulle la géométrie euclidienne,

R

Les deux mémoires de Riemann (5)

Lorsque la courbure sectionnelle est constante, c'est-à-dire ne dépend ni du point considéré ni de la direction de plan passant par ce point, l'approche de Riemann permet de retrouver:

- pour une courbure nulle la géométrie euclidienne,
- pour une courbure négative, les géométries hyperboliques de Bolyai et Lobatchevski,

R

Les deux mémoires de Riemann (5)

Lorsque la courbure sectionnelle est constante, c'est-à-dire ne dépend ni du point considéré ni de la direction de plan passant par ce point, l'approche de Riemann permet de retrouver:

- pour une courbure nulle la géométrie euclidienne,
- pour une courbure négative, les géométries hyperboliques de Bolyai et Lobatchevski,
- pour une courbure positive, la géométrie sphérique.

R

Les deux mémoires de Riemann (5)

Lorsque la courbure sectionnelle est constante, c'est-à-dire ne dépend ni du point considéré ni de la direction de plan passant par ce point, l'approche de Riemann permet de retrouver:

- pour une courbure nulle la géométrie euclidienne,
- pour une courbure négative, les géométries hyperboliques de Bolyai et Lobatchevski,
- pour une courbure positive, la géométrie sphérique.

Mais l'approche de Riemann permet aussi de considérer des espaces bien plus généraux, qui ne sont ni homogènes, ni isotropes. Albert Einstein utilisera cette possibilité pour élaborer la théorie de la Relativité générale.

R

Les deux mémoires de Riemann (6)

Dans le dernier chapitre de ce mémoire, Riemann s'intéresse à la possibilité d'utiliser ses constructions mathématiques pour décrire l'Espace physique. Il présente des idées physiques extrêmement novatrices pour l'époque:

R

Les deux mémoires de Riemann (6)

Dans le dernier chapitre de ce mémoire, Riemann s'intéresse à la possibilité d'utiliser ses constructions mathématiques pour décrire l'Espace physique. Il présente des idées physiques extrêmement novatrices pour l'époque:

- à très petite échelle, les propriétés de l'espace peuvent ne pas être correctement décrites par le modèle mathématique qu'il a élaboré;

R

Les deux mémoires de Riemann (6)

Dans le dernier chapitre de ce mémoire, Riemann s'intéresse à la possibilité d'utiliser ses constructions mathématiques pour décrire l'Espace physique. Il présente des idées physiques extrêmement novatrices pour l'époque:

- à très petite échelle, les propriétés de l'espace peuvent ne pas être correctement décrites par le modèle mathématique qu'il a élaboré;
- ce sont les propriétés physiques de la matière présente dans l'espace qui, à très petite échelle, déterminent les propriétés géométriques de l'espace.

R

Les deux mémoires de Riemann (7)

Riemann écrit (traduction de J. Hoüel):

aller directement page 13

R

Les deux mémoires de Riemann (7)

Riemann écrit (traduction de J. Hoüel):

aller directement page 13

“Nous avons d’abord séparé les rapports d’étendue ou de région des rapports métriques, et nous avons trouvé que, pour les mêmes rapports d’étendue, on pouvait concevoir différents rapports métriques; nous avons ensuite cherché les systèmes de déterminations métriques simples, au moyen desquels les rapports métriques de l’espace sont complètement déterminés, et dont toutes les propositions concernant ces rapports sont des conséquences nécessaires. Il nous reste maintenant à examiner comment, à quel degré et avec quelle extension ces hypothèses sont confirmées par l’expérience”.

R

Les deux mémoires de Riemann (8)

“À ce point de vue il existe, entre les simples rapports d’étendue et les rapports métriques, cette différence essentielle que, dans les premiers, où les cas possibles forment une variété discrète, les résultats de l’expérience ne sont, à la vérité, jamais complètement certains, mais ne sont pas inexacts; tandis que dans le second, où les cas possibles forment une variété continue, toute détermination de l’expérience reste toujours inexacte, quelque grande que puisse être la probabilité de son exactitude approchée. Cette circonstance devient importante lorsqu’il s’agit d’étendre ces déterminations empiriques au delà des limites de l’observation, dans l’immensurablement grand ou dans l’immensurablement petit; car les seconds rapports peuvent évidemment devenir de plus en plus inexacts, dès que l’on sort des limites de l’observation, tandis qu’il n’en est pas de même des premiers”.

R

Les deux mémoires de Riemann (9)

“Lorsqu’on étend les constructions de l’espace à l’immensurablement grand, il faut faire la distinction entre l’illimité et l’infini; le premier appartient aux rapports d’étendue, le second aux rapports métriques. Que l’espace soit une variété illimitée de trois dimensions, c’est là une hypothèse qui s’applique dans toutes nos conceptions du monde extérieur, qui nous sert à compléter à chaque instant le domaine de nos perceptions effectives et à construire les lieux possibles d’un objet cherché, et qui se trouve constamment vérifiée dans toutes ces applications. La propriété de l’espace d’être illimité possède donc une plus grande certitude empirique qu’aucune autre donnée externe de l’expérience”.

R

Les deux mémoires de Riemann (10)

“Mais l’infinité de l’espace n’en est en aucune manière la conséquence; au contraire, si l’on suppose les corps indépendants du lieu, et qu’ainsi on attribue à l’espace une mesure de courbure constante, l’espace serait nécessairement fini, dès que cette mesure de courbure aurait une valeur positive, si petite qu’elle fût. En prolongeant, selon des lignes de plus courte distance, les directions initiales situées dans un élément superficiel, on obtiendrait une surface illimitée de mesure de courbure constante, c’est-à-dire une surface qui, dans une variété plane de trois dimensions, prendrait la forme d’une surface sphérique, et qui serait par conséquent finie”.

R

Les deux mémoires de Riemann (11)

“Les questions sur l’immensurablement grand sont des questions inutiles pour l’explication de la nature. Mais il en est autrement des questions de l’immensurablement petit. C’est sur l’exactitude avec laquelle nous suivons les phénomènes dans l’infiniment petit, que repose essentiellement notre connaissance de leurs rapports de causalité . . . Les questions sur les rapports métriques de l’espace dans l’immensurablement petit ne sont donc pas des questions superflues”.

R

Les deux mémoires de Riemann (12)

“Si l’on suppose que les corps existent indépendamment du lieu, la mesure de courbure est partout constante, et il résulte alors des mesures astronomiques qu’elle ne peut être différente de zéro; dans tous les cas, il faudrait que sa valeur réciproque fût une grandeur en présence de laquelle la portée de nos télescopes serait comme nulle. Mais si cette indépendance entre les corps et le lieu n’existe pas, alors, des rapports métriques reconnus dans le grand, on ne peut rien conclure pour ceux de l’infiniment petit; alors la mesure de courbure de chaque point peut avoir, selon trois directions, une valeur arbitraire, pourvu que la courbure totale de toute portion mesurable de l’espace ne diffère pas sensiblement de zéro; il peut s’introduire des rapports encore plus compliqués, lorsqu’on ne suppose plus que l’élément linéaire puisse être représenté par la racine carrée d’une expression différentielle du second degré”.

R

Les deux mémoires de Riemann (13)

“Or, il semble que les concepts empiriques, sur lesquelles sont fondées les déterminations métriques de l’étendue, le concept du corps solide et celui du rayon lumineux, cessent de subsister dans l’infiniment petit. Il est donc très légitime de supposer que les rapports métriques de l’espace dans l’infiniment petit, ne sont pas conformes aux hypothèses de la géométrie, et c’est ce qu’il faudrait effectivement admettre, du moment où l’on obtiendrait par là une explication plus simple des phénomènes”.

R

Les deux mémoires de Riemann (14)

“La question de la validité des hypothèses de la Géométrie dans l’infiniment petit est liée avec la question du principe intime des rapports métriques de l’espace. Dans cette dernière question, que l’on peut bien encore regarder comme appartenant à la doctrine de l’espace, on trouve l’application de la remarque précédente, que dans une variété discrète, le principe des rapports métriques est déjà contenu dans le concept de cette variété, tandis que, dans une variété continue, ce principe doit venir d’ailleurs. Il faut donc, ou que la réalité sur laquelle est fondé l’espace forme une variété discrète, ou que les fondements des rapports métriques soit cherché en dehors de lui, dans les forces de liaison qui agissent sur lui”.

R

Les deux mémoires de Riemann (15)

"La réponse à ces questions ne peut s'obtenir qu'en partant de la conception des phénomènes, vérifiée jusqu'ici par l'expérience, et que Newton a pris pour base, et en apportant à cette conception les modifications successives, exigées par les faits qu'elle ne peut pas expliquer. Des recherches partant de concepts généraux, comme l'étude que nous venons de faire, ne peuvent avoir d'autre utilité que d'empêcher que ce travail ne soit entravé par des vues trop étroites, et que le progrès dans la connaissance de la dépendance mutuelle des choses ne trouve un obstacle dans les préjugés traditionnels.

R

Les deux mémoires de Riemann (15)

“La réponse à ces questions ne peut s’obtenir qu’en partant de la conception des phénomènes, vérifiée jusqu’ici par l’expérience, et que Newton a pris pour base, et en apportant à cette conception les modifications successives, exigées par les faits qu’elle ne peut pas expliquer. Des recherches partant de concepts généraux, comme l’étude que nous venons de faire, ne peuvent avoir d’autre utilité que d’empêcher que ce travail ne soit entravé par des vues trop étroites, et que le progrès dans la connaissance de la dépendance mutuelle des choses ne trouve un obstacle dans les préjugés traditionnels.

Ceci nous conduit dans le domaine d’une autre science, dans le domaine de la Physique, où l’objet auquel est destiné ce travail ne nous permet pas de pénétrer aujourd’hui”.

R

L’héritage de Riemann en mathématiques

Le mémoire de Riemann “Les hypothèses qui servent de fondement à la Géométrie”, présenté oralement le 10 juin 1854 devant un jury comportant notamment Carl Friedrich Gauss (1777–1855) et Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831–1916), n’a été publié qu’en 1867, un an après la mort de son auteur.

L'héritage de Riemann en mathématiques

Le mémoire de Riemann “Les hypothèses qui servent de fondement à la Géométrie”, présenté oralement le 10 juin 1854 devant un jury comportant notamment Carl Friedrich Gauss (1777–1855) et Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831–1916), n'a été publié qu'en 1867, un an après la mort de son auteur.

Les idées mathématiques très novatrices qu'il contient ont été développées d'abord par Elwin Bruno Christoffel (1829–1900) et par les géomètres de l'école italienne: Luigi Bianchi (1856–1928), Gregorio Ricci-Curbastro (1853–1925), Tullio Levi-Civita (1873–1941), ...

L'héritage de Riemann en mathématiques

Le mémoire de Riemann "Les hypothèses qui servent de fondement à la Géométrie", présenté oralement le 10 juin 1854 devant un jury comportant notamment Carl Friedrich Gauss (1777–1855) et Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831–1916), n'a été publié qu'en 1867, un an après la mort de son auteur.

Les idées mathématiques très novatrices qu'il contient ont été développées d'abord par Elwin Bruno Christoffel (1829–1900) et par les géomètres de l'école italienne: Luigi Bianchi (1856–1928), Gregorio Ricci-Curbastro (1853–1925), Tullio Levi-Civita (1873–1941), ...

En cinquante ans, ces efforts ont permis de développer ce qu'on appelle aujourd'hui la géométrie différentielle: calcul différentiel absolu, calcul tensoriel sur les variétés, notion de transport parallèle, . . .

L’héritage de Riemann en mathématiques

En 1917, Hermann Weyl (1885–1955) remarque que pour définir le transport parallèle (introduit par Levi-Civita à partir des idées de Riemann), il n’est pas nécessaire de munir la variété considérée d’une structure riemannienne; il introduit une notion nouvelle, celle de connexion, qui suffit pour définir le transport parallèle, les géodésiques et bien d’autres notions, comme celle de courbure, auparavant définies à partir de la structure riemannienne.

R

L'héritage de Riemann en mathématiques

En 1917, Hermann Weyl (1885–1955) remarque que pour définir le transport parallèle (introduit par Levi-Civita à partir des idées de Riemann), il n'est pas nécessaire de munir la variété considérée d'une structure riemannienne; il introduit une notion nouvelle, celle de connexion, qui suffit pour définir le transport parallèle, les géodésiques et bien d'autres notions, comme celle de courbure, auparavant définies à partir de la structure riemannienne.

Hermann Weyl introduit aussi la notion de conformité et découvre le tenseur qui aujourd'hui porte son nom, dont l'annulation est une condition nécessaire et suffisante pour qu'une variété riemannienne soit conformément euclidienne.

R

L'héritage de Riemann en mathématiques

C'est également Hermann Weyl qui, dans son livre sur les surfaces de Riemann publié en 1911, utilise pour la première fois la manière actuelle de définir une variété au moyen d'une famille de cartes locales formant un atlas.

L’héritage de Riemann en mathématiques

C’est également Hermann Weyl qui, dans son livre sur les surfaces de Riemann publié en 1911, utilise pour la première fois la manière actuelle de définir une variété au moyen d’une famille de cartes locales formant un atlas.

Élie Joseph Cartan (1869–1951) généralise la notion de connexion et en pousse très loin l’étude. Il introduit divers types de connexions: linéaires, affines, projectives, conformes, ...

L’héritage de Riemann en mathématiques

C’est également Hermann Weyl qui, dans son livre sur les surfaces de Riemann publié en 1911, utilise pour la première fois la manière actuelle de définir une variété au moyen d’une famille de cartes locales formant un atlas.

Élie Joseph Cartan (1869–1951) généralise la notion de connexion et en pousse très loin l’étude. Il introduit divers types de connexions: linéaires, affines, projectives, conformes, ...

Son idée directrice: associer, à chaque point de la variété, un espace homogène, de même dimension que cette variété, tangent en un certain sens à celle-ci. Il introduit les groupes d’holonomie et précise les notions de courbure et de torsion d’une connexion affine. La théorie des connexions sera parachevée vers 1950 par Charles Ehresmann (1905–1979).

L'héritage de Riemann en Physique

La partie physique des idées de Riemann, extraordinairement en avance sur son époque (on peut y déceler, en germe, les grands principes de la Relativité générale et de la Mécanique quantique) est restée méconnue pendant près d'un siècle.

R

L'héritage de Riemann en Physique

La partie physique des idées de Riemann, extraordinairement en avance sur son époque (on peut y déceler, en germe, les grands principes de la Relativité générale et de la Mécanique quantique) est restée méconnue pendant près d'un siècle.

Cependant, William Kingdom Clifford (1845–1879) a vu l'importance de ces idées, et a écrit (cité par V.S. Varadarajan):

R

L'héritage de Riemann en Physique (2)

"Riemann has shown that as there are different kinds of lines and surfaces, so there are different kinds of spaces of three dimensions; and that we can only find by experience to which of these kinds the space we live in belongs. In particular, the axioms of plane geometry are true within the limit of experiment on the surface of a sheet of paper, and yet we know that the sheet is really covered with a number of small ridges and furrows, upon which (the total curvature not being zero) these axioms are not true.Similarly, he says although the axioms of solid geometry are true within the limits of experiment for finite parts of space, yet we have no reason to conclude that they are true for very small portions; and if any help can be got thereby for the explanation of physical phenomena, we may have reason to conclude that they are not true for very small portions of space".

R

L'héritage de Riemann en Physique (3)

"I wish here to indicate a manner in which these speculations may be applied to the investigation of physical phenomena. I hold in fact

R

L'héritage de Riemann en Physique (3)

"I wish here to indicate a manner in which these speculations may be applied to the investigation of physical phenomena. I hold in fact

- *That small portions of space are in fact analogous to little hills on a surface which is on the average flat; namely, that the ordinary laws of geometry are not valid in them.*

R

L’héritage de Riemann en Physique (3)

“I wish here to indicate a manner in which these speculations may be applied to the investigation of physical phenomena. I hold in fact

- *That small portions of space are in fact analogous to little hills on a surface which is on the average flat; namely, that the ordinary laws of geometry are not valid in them.*
- *That this property of being curved and distorted is continually being passed on from one portion of space to another after the manner of a wave.*

R

L'héritage de Riemann en Physique (3)

"I wish here to indicate a manner in which these speculations may be applied to the investigation of physical phenomena. I hold in fact

- *That small portions of space are in fact analogous to little hills on a surface which is on the average flat; namely, that the ordinary laws of geometry are not valid in them.*
- *That this property of being curved and distorted is continually being passed on from one portion of space to another after the manner of a wave.*
- *That this variation of curvature of space is what really happens in that phenomena which we call the motion of matter, whether ponderal or etheral.*

R

L’héritage de Riemann en Physique (3)

“I wish here to indicate a manner in which these speculations may be applied to the investigation of physical phenomena. I hold in fact

- *That small portions of space are in fact analogous to little hills on a surface which is on the average flat; namely, that the ordinary laws of geometry are not valid in them.*
- *That this property of being curved and distorted is continually being passed on from one portion of space to another after the manner of a wave.*
- *That this variation of curvature of space is what really happens in that phenomena which we call the motion of matter, whether ponderal or etheral.*
- *That in the physical world nothing else takes place but this variation, subject (possibly) to the law of continuity”.*

R

Les symétries de l’Espace

Les symétries de l’espace euclidien ont été utilisées dès l’Antiquité, par exemple pour démontrer les cas d’égalité des triangles (en déplaçant un triangle sans le déformer pour l’amener en coïncidence avec un autre triangle).

Les symétries de l'Espace

Les symétries de l'espace euclidien ont été utilisées dès l'Antiquité, par exemple pour démontrer les cas d'égalité des triangles (en déplaçant un triangle sans le déformer pour l'amener en coïncidence avec un autre triangle).

L'ensemble des déplacements euclidiens forme un groupe.

Ce concept, clairement reconnu vers 1830 par Évariste Galois (1811–1832) qui l'a utilisé pour la théorie qui porte aujourd'hui son nom, s'est imposé en géométrie grâce aux travaux de Christian Felix Klein (1849–1925) et de Marius Sophus Lie (1842–1899). Tous deux ont séjourné à Paris vers 1870 et ont été influencés par Jean Gaston Darboux (1842–1917) et Marie Ennemond Camille Jordan (1838–1922), grâce à qui l'héritage de Galois n'a pas été définitivement perdu.

Les symétries de l'Espace (2)

En 1872, Felix Klein obtient un poste de Professeur à l'université d'Erlangen. Sa leçon inaugurale (le programme d'Erlangen) a eu une influence profonde sur le développement de la Géométrie. L'idée maîtresse qu'il développe est la suivante:

R

Les symétries de l'Espace (2)

En 1872, Felix Klein obtient un poste de Professeur à l'université d'Erlangen. Sa leçon inaugurale (le programme d'Erlangen) a eu une influence profonde sur le développement de la Géométrie. L'idée maîtresse qu'il développe est la suivante:

Une Géométrie est un ensemble (que Klein appelle multiplicité, dans le langage actuel variété) sur lequel un groupe de transformations agit. L'étude de cette Géométrie n'est autre que la recherche des invariants de ce groupe de transformations.

Les symétries de l'Espace (2)

En 1872, Felix Klein obtient un poste de Professeur à l'université d'Erlangen. Sa leçon inaugurale (le programme d'Erlangen) a eu une influence profonde sur le développement de la Géométrie. L'idée maîtresse qu'il développe est la suivante:

Une Géométrie est un ensemble (que Klein appelle multiplicité, dans le langage actuel variété) sur lequel un groupe de transformations agit. L'étude de cette Géométrie n'est autre que la recherche des invariants de ce groupe de transformations.

L'objet le plus important d'une Géométrie est le groupe de transformations, et non l'ensemble sur lequel il agit (qu'on peut d'ailleurs construire comme un espace homogène du groupe si l'action est transitive).

R

Les symétries de l'Espace (3)

Cette idée permet à Felix Klein de donner une présentation unifiée des diverses géométries: affine, euclidienne, projective, . . ., et de les développer.

R

Les symétries de l’Espace (3)

Cette idée permet à Felix Klein de donner une présentation unifiée des diverses géométries: affine, euclidienne, projective, . . ., et de les développer.

Sophus Lie s’intéresse aux groupes de transformations (d’une variété différentiable) qui dépendent d’un nombre fini de paramètres pouvant varier de manière continue. On les appelle aujourd’hui groupes de Lie.

R

Les symétries de l'Espace (3)

Cette idée permet à Felix Klein de donner une présentation unifiée des diverses géométries: affine, euclidienne, projective, . . ., et de les développer.

Sophus Lie s'intéresse aux groupes de transformations (d'une variété différentiable) qui dépendent d'un nombre fini de paramètres pouvant varier de manière continue. On les appelle aujourd'hui groupes de Lie.

En différentiant par rapport aux paramètres dont dépend le groupe, il découvre ce qu'on appelle aujourd'hui les algèbres de Lie, étudie leurs relations avec les groupes de Lie. Il montre qu'à tout groupe de Lie est associée une algèbre de Lie et que, réciproquement, toute algèbre de Lie est l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie local.

R

Les symétries de l'Espace (4)

C'est Élie Cartan qui montrera qu'on peut enlever le mot restrictif local, et qui donnera une preuve complète de cet important résulat (troisième théorème de Lie).

R

Les symétries de l'Espace (4)

C'est Élie Cartan qui montrera qu'on peut enlever le mot restrictif local, et qui donnera une preuve complète de cet important résulat (troisième théorème de Lie).

L'œuvre d'Élie Cartan est considérable: il introduit en géométrie différentielle la très novatrice méthode du repère mobile, élabore la classification complète de toutes les algèbres de Lie simples complexes (commencée par Wilhelm Karl Joseph Killing (1847–1923)), découvre les espaces riemanniens symétriques, ...

R

Les symétries de l’Espace (4)

C’est Élie Cartan qui montrera qu’on peut enlever le mot restrictif local, et qui donnera une preuve complète de cet important résulat (troisième théorème de Lie).

L’œuvre d’Élie Cartan est considérable: il introduit en géométrie différentielle la très novatrice méthode du repère mobile, élabore la classification complète de toutes les algèbres de Lie simples complexes (commencée par Wilhelm Karl Joseph Killing (1847–1923)), découvre les espaces riemanniens symétriques, ...

Très intéressé par les progrès de la Physique à son époque, Élie Cartan a eu une correspondance régulière avec Albert Einstein. Plusieurs de ses publications comportent des applications à l’Espace physique et aux fondements de la Mécanique de ses idées mathématiques.

R

La Relativité restreinte

James Clerk Maxwell (1831–1879) avait, au début de la décennie 1860-1869, établi les équations qui régissent les phénomènes électromagnétiques et introduit le concept de champ. Ses équations prévoyaient la propagation des perturbations électromagnétiques sous forme d'ondes, à une vitesse finie, la même dans toutes les directions, indépendamment du mouvement de la source. Il remarqua que cette vitesse était proche de celle de la lumière.

La Relativité restreinte

James Clerk Maxwell (1831–1879) avait, au début de la décennie 1860-1869, établi les équations qui régissent les phénomènes électromagnétiques et introduit le concept de champ. Ses équations prévoyaient la propagation des perturbations électromagnétiques sous forme d'ondes, à une vitesse finie, la même dans toutes les directions, indépendamment du mouvement de la source. Il remarqua que cette vitesse était proche de celle de la lumière.

Celle-ci avait été mesurée en 1849 par Armand Hippolyte Louis Fizeau (1819–1896) puis, en 1862, avec une meilleure précision, par Jean Bernard Léon Foucault (1819–1868). Maxwell comprit que la lumière était une perturbation électromagnétique et que la vitesse prévue par ses équations était celle de la lumière.

R

La Relativité restreinte (2)

En cinématique classique, un phénomène ne peut se propager avec la même vitesse dans toutes les directions que relativement à un référentiel particulier. Les physiciens, qui ne croyaient plus vraiment à l'Espace absolu de Newton, ont imaginé un milieu appelé éther luminifère, supposé imprégner toutes choses, servant de support aux ondes électromagnétiques; ils pensaient que c'est par rapport à l'éther luminifère que la vitesse de la lumière était la même dans toutes les directions. En mesurant la vitesse de la lumière dans diverses directions, à différentes époques de l'année, ils pensaient pouvoir déceler le déplacement de la Terre par rapport à l'éther.

La Relativité restreinte (2)

En cinématique classique, un phénomène ne peut se propager avec la même vitesse dans toutes les directions que relativement à un référentiel particulier. Les physiciens, qui ne croyaient plus vraiment à l'Espace absolu de Newton, ont imaginé un milieu appelé éther luminifère, supposé imprégner toutes choses, servant de support aux ondes électromagnétiques; ils pensaient que c'est par rapport à l'éther luminifère que la vitesse de la lumière était la même dans toutes les directions. En mesurant la vitesse de la lumière dans diverses directions, à différentes époques de l'année, ils pensaient pouvoir déceler le déplacement de la Terre par rapport à l'éther.

Ces mesures, faites vers 1887 par Albert Abraham Michelson (1852–1931) et Edward Williams Morley (1838–1923) n'ont mis en évidence aucun mouvement de la Terre par rapport à l'hypothétique éther.

La Relativité restreinte (3)

En 1905, Albert Einstein (1879–1955) propose une explication tout à fait révolutionnaire. Il voit clairement que la propriété qu'a la lumière de se propager à la même vitesse dans toutes les directions, quel que soit le référentiel relativement auquel on rapporte cette vitesse, est incompatible avec le caractère absolu de la notion de simultanéité (pour deux événements ayant lieu en deux endroits différents). Il propose de donner le statut de principe à:

La Relativité restreinte (3)

En 1905, Albert Einstein (1879–1955) propose une explication tout à fait révolutionnaire. Il voit clairement que la propriété qu'a la lumière de se propager à la même vitesse dans toutes les directions, quel que soit le référentiel relativement auquel on rapporte cette vitesse, est incompatible avec le caractère absolu de la notion de simultanéité (pour deux événements ayant lieu en deux endroits différents). Il propose de donner le statut de principe à:

- l'équivalence de tous les référentiels inertiels, pour tous les phénomènes physiques, tant mécaniques qu'électromagnétiques (principe de relativité),

La Relativité restreinte (3)

En 1905, Albert Einstein (1879–1955) propose une explication tout à fait révolutionnaire. Il voit clairement que la propriété qu'a la lumière de se propager à la même vitesse dans toutes les directions, quel que soit le référentiel relativement auquel on rapporte cette vitesse, est incompatible avec le caractère absolu de la notion de simultanéité (pour deux événements ayant lieu en deux endroits différents). Il propose de donner le statut de principe à:

- l'équivalence de tous les référentiels inertiels, pour tous les phénomènes physiques, tant mécaniques qu'électromagnétiques (principe de relativité),
- la constance de la vitesse de la lumière, quels que soient sa direction de propagation, le mouvement de la source et le référentiel inertiel dans lequel on l'évalue.

La Relativité restreinte (4)

Albert Einstein montre que sur ces bases, on peut construire une théorie cohérente, à condition de renoncer au caractère absolu de la notion de simultanéité, c'est-à-dire à l'existence d'un Temps absolu. Le principe de relativité conduit à renoncer aussi aux notions de mouvement et de repos absolus.

R

La Relativité restreinte (4)

Albert Einstein montre que sur ces bases, on peut construire une théorie cohérente, à condition de renoncer au caractère absolu de la notion de simultanéité, c'est-à-dire à l'existence d'un Temps absolu. Le principe de relativité conduit à renoncer aussi aux notions de mouvement et de repos absolus.

Einstein affirme aussi que dans sa théorie,le concept d'éther luminifère est superflu.

R

La Relativité restreinte (4)

Albert Einstein montre que sur ces bases, on peut construire une théorie cohérente, à condition de renoncer au caractère absolu de la notion de simultanéité, c'est-à-dire à l'existence d'un Temps absolu. Le principe de relativité conduit à renoncer aussi aux notions de mouvement et de repos absolus.

Einstein affirme aussi que dans sa théorie,le concept d'éther luminifère est superflu.

La même année (1905) Jules Henri Poincaré (1854–1912) publie une Note aux comptes rendus de l'Académie et un long mémoire dans lesquels il introduit des "temps locaux", dépendant de l'observateur, et étudie les transformations de Lorentz. C'est lui qui les a ainsi nommées, en hommage à Hendrik Anton Lorentz (1853–1928).

R

La Relativité restreinte (4)

Les transformations de Lorentz sont des changements de coordonnées linéaires faisant intervenir les quatre coordonnées dont dépend un événement: à la fois les trois coordonnées du point de l'espace où cet événement a lieu, et une quatrième coordonnée, le temps, plus précisément l'instant auquel cet événement a lieu.

R

La Relativité restreinte (4)

Les transformations de Lorentz sont des changements de coordonnées linéaires faisant intervenir les quatre coordonnées dont dépend un événement: à la fois les trois coordonnées du point de l'espace où cet événement a lieu, et une quatrième coordonnée, le temps, plus précisément l'instant auquel cet événement a lieu.

Une transformation de Lorentz peut être vue comme la transformation qui donne les quatre coordonnées d'un événement dans le référentiel employé par un observateur en fonction des quatre coordonnées de ce même événement dans le référentiel d'un autre observateur.

R

La Relativité restreinte (5)

Une transformation de Lorentz peut aussi être vue comme une transformation ponctuelle, non pas de l'Espace, mais de l'Espace-Temps, faisant correspondre à chaque événement un autre événement. Poincaré montre que les transformations de Lorentz forment un groupe et détermine les invariants de ce groupe.

La Relativité restreinte (5)

Une transformation de Lorentz peut aussi être vue comme une transformation ponctuelle, non pas de l'Espace, mais de l'Espace-Temps, faisant correspondre à chaque événement un autre événement. Poincaré montre que les transformations de Lorentz forment un groupe et détermine les invariants de ce groupe.

Poincaré a, sans aucun doute, bien compris que les temps locaux mesurés par deux observateurs différents ne sont pas les mêmes, puisqu'il indique les formules qui permettent de passer de l'un à l'autre.

La Relativité restreinte (5)

Une transformation de Lorentz peut aussi être vue comme une transformation ponctuelle, non pas de l'Espace, mais de l'Espace-Temps, faisant correspondre à chaque événement un autre événement. Poincaré montre que les transformations de Lorentz forment un groupe et détermine les invariants de ce groupe.

Poincaré a, sans aucun doute, bien compris que les temps locaux mesurés par deux observateurs différents ne sont pas les mêmes, puisqu'il indique les formules qui permettent de passer de l'un à l'autre.

Il a vu aussi que les transformations de Lorentz sont en accord avec la propriété de la lumière de se propager à la même vitesse dans toutes les directions, quel que soit le référentiel (inertiel) par rapport auquel on évalue cette vitesse.

La Relativité restreinte (6)

Mais Poincaré ne dit pas (ou du moins, pas aussi clairement que l'a fait Einstein) que le concept de Temps absolu doit être abandonné, ni que le concept d'éther est superflu.

R

La Relativité restreinte (6)

Mais Poincaré ne dit pas (ou du moins, pas aussi clairement que l'a fait Einstein) que le concept de Temps absolu doit être abandonné, ni que le concept d'éther est superflu.

C'est Hermann Minkowski (1864–1909) qui, en 1908, a décrit de manière précise l'Espace-Temps de la Relativité restreinte qui aujourd'hui porte son nom: espace affine de dimension 4, muni d'un produit scalaire pseudo-euclidien de signature $(+,-,-,-)$. Les transformations de Lorentz sont les transformations linéaires de l'espace vectoriel associé qui laissent ce produit scalaire invariant.

R

La Relativité restreinte (6)

Mais Poincaré ne dit pas (ou du moins, pas aussi clairement que l'a fait Einstein) que le concept de Temps absolu doit être abandonné, ni que le concept d'éther est superflu.

C'est Hermann Minkowski (1864–1909) qui, en 1908, a décrit de manière précise l'Espace-Temps de la Relativité restreinte qui aujourd'hui porte son nom: espace affine de dimension 4, muni d'un produit scalaire pseudo-euclidien de signature $(+,-,-,-)$. Les transformations de Lorentz sont les transformations linéaires de l'espace vectoriel associé qui laissent ce produit scalaire invariant.

Sans en donner la définition formelle, Poincaré avait déjà considéré cet Espace-Temps et avait étudié ses propriétés géométriques dans son mémoire de 1905. R

La Relativité restreinte (7)

La géométrie de l'Espace-Temps de Minkowski est un exemple de Géométrie au sens de Felix Klein; son groupe de transformations est le groupe de Poincaré, engendré en composant les transformations de Lorentz et les translations.

R

La Relativité restreinte (7)

La géométrie de l'Espace-Temps de Minkowski est un exemple de Géométrie au sens de Felix Klein; son groupe de transformations est le groupe de Poincaré, engendré en composant les transformations de Lorentz et les translations.

Mais contrairement à ce qui a lieu pour les géométries euclidienne, projective ou hyperbolique, les directions de droites, dans l'Espace-Temps de Minkowski, ne sont pas toutes équivalentes; le groupe de Poincaré n'agit pas transitivement sur l'ensemble des droites; on doit distinguer trois types de droites: de genre temps, de genre espace et de genre lumière.

R

La Relativité restreinte (8)

Dans ses célèbres livres de philosophie des sciences, Henri Poincaré indique comment il conçoit le Temps et l'Espace.

R

La Relativité restreinte (8)

Dans ses célèbres livres de philosophie des sciences, Henri Poincaré indique comment il conçoit le Temps et l'Espace.

Pour lui, donner à la notion de simultanéité un caractère intrinsèque, et ainsi introduire un Temps absolu, de même qu'admettre que l'Espace est euclidien, sont de simples conventions, non des lois physiques.

R

La Relativité restreinte (8)

Dans ses célèbres livres de philosophie des sciences, Henri Poincaré indique comment il conçoit le Temps et l'Espace.

Pour lui, donner à la notion de simultanéité un caractère intrinsèque, et ainsi introduire un Temps absolu, de même qu'admettre que l'Espace est euclidien, sont de simples conventions, non des lois physiques.

Ces conventions se sont révélées pratiques parce qu'elles sont conformes à notre intuition et qu'elles conduisent à une formulation simple des lois physiques. Il écrit par exemple (texte d'une conférence prononcée à Londres le 4 mai 1912, à propos de la “Mécanique nouvelle”, c'est-à-dire la théorie de la Relativité restreinte):

R

La Relativité restreinte (9)

“Quelle va être notre position en face de ces nouvelles conceptions? Allons-nous être forcés de modifier nos conclusions? Non certes : nous avions adopté une convention parce qu’elle nous semblait commode, et nous disions que rien ne pourrait nous contraindre à l’abandonner. Aujourd’hui certains physiciens veulent adopter une convention nouvelle. Ce n’est pas qu’ils y soient contraints; ils jugent cette convention nouvelle plus commode, voilà tout; et ceux qui ne sont pas de cet avis peuvent légitimement conserver l’ancienne pour ne pas troubler leurs vieilles habitudes. Je crois, entre nous, que c’est ce qu’ils feront encore longtemps”.

R

La Relativité générale

L'Espace-Temps de Minkowski, employé en Relativité restreinte, est un espace affine de dimension 4, munie d'un produit scalaire pseudo-euclidien de signature $(+, -, -, -)$.

La Relativité générale

L'Espace-Temps de Minkowski, employé en Relativité restreinte, est un espace affine de dimension 4, munie d'un produit scalaire pseudo-euclidien de signature $(+, -, -, -)$.

Dans la théorie de la Relativité générale, élaborée par Albert Einstein entre 1905 et 1915, c'est une variété différentiable de dimension 4, munie d'une structure pseudo-riemannienne de signature $(+, -, -, -)$.

R

La Relativité générale

L'Espace-Temps de Minkowski, employé en Relativité restreinte, est un espace affine de dimension 4, munie d'un produit scalaire pseudo-euclidien de signature $(+,-,-,-)$.

Dans la théorie de la Relativité générale, élaborée par Albert Einstein entre 1905 et 1915, c'est une variété différentiable de dimension 4, munie d'une structure pseudo-riemannienne de signature $(+,-,-,-)$.

Du point de vue mathématique, cette généralisation peut sembler assez naturelle; mais du point de vue physique, elle modifie en profondeur notre conception de l'Espace-Temps.

R

La Relativité générale

L'Espace-Temps de Minkowski, employé en Relativité restreinte, est un espace affine de dimension 4, munie d'un produit scalaire pseudo-euclidien de signature $(+, -, -, -)$.

Dans la théorie de la Relativité générale, élaborée par Albert Einstein entre 1905 et 1915, c'est une variété différentiable de dimension 4, munie d'une structure pseudo-riemannienne de signature $(+, -, -, -)$.

Du point de vue mathématique, cette généralisation peut sembler assez naturelle; mais du point de vue physique, elle modifie en profondeur notre conception de l'Espace-Temps.

L'Espace-Temps de la Relativité générale se distingue de l'Espace-Temps de Minkowski notamment par les aspects suivants:

R

La Relativité générale (2)

- plus de repères inertiels privilégiés; les repères de la Relativité Générale ne sont plus globaux, mais seulement locaux; en rendant possibles des changements de repère plus généraux, la nouvelle théorie incorpore le principe d'équivalence qui unifie forces d'inertie et forces gravitationnelles;

R

La Relativité générale (2)

- plus de repères inertiels privilégiés; les repères de la Relativité Générale ne sont plus globaux, mais seulement locaux; en rendant possibles des changements de repère plus généraux, la nouvelle théorie incorpore le principe d'équivalence qui unifie forces d'inertie et forces gravitationnelles;
- ce principe "explique" un fait d'expérience connu depuis Galilée et jusque là mal compris: l'identité de la masse inerte et de la masse gravitationnelle;

R

La Relativité générale (2)

- plus de repères inertiels privilégiés; les repères de la Relativité Générale ne sont plus globaux, mais seulement locaux; en rendant possibles des changements de repère plus généraux, la nouvelle théorie incorpore le principe d'équivalence qui unifie forces d'inertie et forces gravitationnelles;
- ce principe "explique" un fait d'expérience connu depuis Galilée et jusque là mal compris: l'identité de la masse inerte et de la masse gravitationnelle;
- l'Espace-Temps n'est plus un cadre inerte dans lequel les phénomènes physiques prennent place, sans agir sur les propriétés de ce cadre; la matière, et plus généralement toutes les formes d'énergie, agissent sur l'Espace-Temps en contribuant à sa courbure.

R

La Mécanique quantique

La Mécanique quantique, créée, de 1900 à 1925, notamment par Max (Karl Ernst Ludwig) Planck (1858–1947), Erwin Schrödinger (1873–1916), Albert Einstein (1879–1955), Niels Henrik David Bohr (1885–1962), Louis-Victor Pierre Raymond de Broglie (1892–1987), Wolfgang Pauli (1900–1958), Werner Karl Heisenberg (1901–1976), introduit un formalisme mathématique entièrement nouveau pour la description des systèmes physiques.

R

La Mécanique quantique

La Mécanique quantique, créée, de 1900 à 1925, notamment par Max (Karl Ernst Ludwig) Planck (1858–1947), Erwin Schrödinger (1873–1916), Albert Einstein (1879–1955), Niels Henrik David Bohr (1885–1962), Louis-Victor Pierre Raymond de Broglie (1892–1987), Wolfgang Pauli (1900–1958), Werner Karl Heisenberg (1901–1976), introduit un formalisme mathématique entièrement nouveau pour la description des systèmes physiques.

Les états d'un système sont décrits par les sous-espaces de dimension 1 d'un espace de Hilbert complexe. On dira que cet espace de Hilbert est l'espace des états du système.

R

La mécanique quantique (2)

L'Espace physique de la Mécanique classique reste à l'arrière-plan: il joue un rôle pour la construction de l'espace de Hilbert des états du système, et intervient lors des mesures faites pour localiser le système étudié, par le biais d'opérateurs, dont les valeurs propres sont les résultats possibles de cette mesure.

La mécanique quantique (2)

L'Espace physique de la Mécanique classique reste à l'arrière-plan: il joue un rôle pour la construction de l'espace de Hilbert des états du système, et intervient lors des mesures faites pour localiser le système étudié, par le biais d'opérateurs, dont les valeurs propres sont les résultats possibles de cette mesure.

Les symétries de l'Espace (ou, en mécanique quantique relativiste, de l'Espace-Temps) apparaissent par le biais de représentations linéaires (ou, plus généralement, de représentations projectives) du groupe de symétries dans l'espace de Hilbert des états du système.

La mécanique quantique (2)

L'Espace physique de la Mécanique classique reste à l'arrière-plan: il joue un rôle pour la construction de l'espace de Hilbert des états du système, et intervient lors des mesures faites pour localiser le système étudié, par le biais d'opérateurs, dont les valeurs propres sont les résultats possibles de cette mesure.

Les symétries de l'Espace (ou, en mécanique quantique relativiste, de l'Espace-Temps) apparaissent par le biais de représentations linéaires (ou, plus généralement, de représentations projectives) du groupe de symétries dans l'espace de Hilbert des états du système.

L'importance du rôle des groupes de symétrie en mécanique quantique a été très tôt reconnue, notamment par Hermann Weyl (voir son livre de 1928 “The theory of groups and quantum mechanics”).

Les spineurs

À son origine, la mécanique quantique fut développée dans le cadre de la cinématique classique, non relativiste, avec pour groupe de symétries de l'espace le groupe des déplacements euclidiens.

R

Les spineurs

À son origine, la mécanique quantique fut développée dans le cadre de la cinématique classique, non relativiste, avec pour groupe de symétries de l'espace le groupe des déplacements euclidiens.

En 1929, Paul Adrien Maurice Dirac (1902–1984) présenta une théorie à la fois relativiste et quantique de l'électron. Il dut pour cela introduire une notion nouvelle en Physique, celle de spineur.

R

Les spineurs

À son origine, la mécanique quantique fut développée dans le cadre de la cinématique classique, non relativiste, avec pour groupe de symétries de l'espace le groupe des déplacements euclidiens.

En 1929, Paul Adrien Maurice Dirac (1902–1984) présenta une théorie à la fois relativiste et quantique de l'électron. Il dut pour cela introduire une notion nouvelle en Physique, celle de spineur.

En mathématiques, les spineurs avaient été déjà découverts en 1913 par Élie Cartan, lors de la classification des représentations des algèbres de Lie simples.

R

Les spineurs (2)

Pour décrire le mouvement des électrons en tenant compte de leur spin (moment cinétique propre), Dirac a cherché à construire une équation aux dérivées partielles du premier ordre, aujourd’hui appelée équation de Dirac, de la forme:

R

Les spineurs (2)

Pour décrire le mouvement des électrons en tenant compte de leur spin (moment cinétique propre), Dirac a cherché à construire une équation aux dérivées partielles du premier ordre, aujourd'hui appelée équation de Dirac, de la forme:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(-i\hbar c\sum_{i=1}^{3}\alpha^i\frac{\partial}{\partial x^i} + \beta mc^2\right)\psi\,.$$

R

Les spineurs (2)

Pour décrire le mouvement des électrons en tenant compte de leur spin (moment cinétique propre), Dirac a cherché à construire une équation aux dérivées partielles du premier ordre, aujourd'hui appelée équation de Dirac, de la forme:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(-i\hbar c\sum_{i=1}^{3}\alpha^i\frac{\partial}{\partial x^i} + \beta mc^2\right)\psi\,.$$

Pour des raisons imposées par la Physique, l'opérateur différentiel figurant au second membre devait vérifier:

R

Les spineurs (2)

Pour décrire le mouvement des électrons en tenant compte de leur spin (moment cinétique propre), Dirac a cherché à construire une équation aux dérivées partielles du premier ordre, aujourd'hui appelée équation de Dirac, de la forme:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-i\hbar c \sum_{i=1}^{3} \alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \beta m c^2 \right) \psi \,.$$

Pour des raisons imposées par la Physique, l'opérateur différentiel figurant au second membre devait vérifier:

$$\left(-i\hbar c \sum_{i=1}^{3} \alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \beta m c^2 \right)^2 = -\hbar^2 \Delta + m^2 c^4 \,.$$

R

Les spineurs (3)

Cette relation est vérifiée si les α^i et β sont des matrices carrées $p \times p$ vérifiant:

R

Les spineurs (3)

Cette relation est vérifiée si les α^i et β sont des matrices carrées $p \times p$ vérifiant:

$$\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i = 2\delta^{ij} I_p \,, \quad \alpha^i \beta + \beta \alpha^i = 0 \,, \quad \beta^2 = I_p \,.$$

R

Les spineurs (3)

Cette relation est vérifiée si les α^i et β sont des matrices carrées $p \times p$ vérifiant:

$$\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i = 2\delta^{ij} I_p \,, \quad \alpha^i \beta + \beta \alpha^i = 0 \,, \quad \beta^2 = I_p \,.$$

Pour $p = 4$ par exemple, on peut prendre

R

Les spineurs (3)

Cette relation est vérifiée si les α^i et β sont des matrices carrées $p \times p$ vérifiant:

$$\alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i = 2\delta^{ij} I_p\,, \quad \alpha^i\beta + \beta\alpha^i = 0\,, \quad \beta^2 = I_p\,.$$

Pour $p = 4$ par exemple, on peut prendre

$$\beta = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}\,, \quad \alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}\,,$$

R

Les spineurs (3)

Cette relation est vérifiée si les α^i et β sont des matrices carrées $p \times p$ vérifiant:

$$\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i = 2\delta^{ij} I_p \,, \quad \alpha^i \beta + \beta \alpha^i = 0 \,, \quad \beta^2 = I_p \,.$$

Pour $p = 4$ par exemple, on peut prendre

$$\beta = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} , \quad \alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} ,$$

où les σ_i sont les matrices de Pauli:

R

Les spineurs (3)

Cette relation est vérifiée si les α^i et β sont des matrices carrées $p \times p$ vérifiant:

$$\alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i = 2\delta^{ij} I_p\,, \quad \alpha^i\beta + \beta\alpha^i = 0\,, \quad \beta^2 = I_p\,.$$

Pour $p = 4$ par exemple, on peut prendre

$$\beta = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}, \quad \alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

où les σ_i sont les matrices de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

R

Les spineurs (4)

La fonction d'onde ψ intervenant dans l'équation de Dirac prend ses valeurs dans l'espace des spineurs. Elle a p composantes complexes ($p = 4$ dans la représentation de Dirac).

R

Les spineurs (4)

La fonction d'onde ψ intervenant dans l'équation de Dirac prend ses valeurs dans l'espace des spineurs. Elle a p composantes complexes ($p = 4$ dans la représentation de Dirac).

Pour une particule de masse nulle ($m = 0$), on n'a pas besoin de la matrice β; on peut prendre $p = 2$, et

R

Les spineurs (4)

La fonction d'onde ψ intervenant dans l'équation de Dirac prend ses valeurs dans l'espace des spineurs. Elle a p composantes complexes ($p = 4$ dans la représentation de Dirac).

Pour une particule de masse nulle ($m = 0$), on n'a pas besoin de la matrice β; on peut prendre $p = 2$, et

$$\alpha^i = \sigma_i \,, \quad i = 1\,,\ 2\,,\ 3\,.$$

R

Les spineurs (4)

La fonction d'onde ψ intervenant dans l'équation de Dirac prend ses valeurs dans l'espace des spineurs. Elle a p composantes complexes ($p = 4$ dans la représentation de Dirac).

Pour une particule de masse nulle ($m = 0$), on n'a pas besoin de la matrice β; on peut prendre $p = 2$, et

$$\alpha^i = \sigma_i \, , \quad i = 1 \, , \; 2 \, , \; 3 \, .$$

En 1930, Hermann Weyl avait obtenu des équations analogues à l'équation de Dirac pour une particule de masse nulle. Initialement rejetées par les physiciens parce que non invariantes par réflexion d'espace, elles se sont révélées plus tard applicables aux neutrinos.

R

Les spineurs (5)

L'opérateur de Dirac admet des valeurs propres positives et négatives. L'existence de valeurs propres négatives ont conduit Dirac à postuler l'existence de l'anti-matière, ce que l'expérience a confirmé.

R

Les spineurs (5)

L'opérateur de Dirac admet des valeurs propres positives et négatives. L'existence de valeurs propres négatives ont conduit Dirac à postuler l'existence de l'anti-matière, ce que l'expérience a confirmé.

C'est non pas le groupe de Lorentz, mais son revêtement universel (dont la composante neutre est $SL(2, \mathbb{C})$) qui agit sur l'espace des spineurs. Ce fait a conduit à bien des spéculations. Cependant, lorsqu'on passe à l'espace projectif, c'est bien une représentation projective du groupe de Lorentz que l'on obtient.

R

Développements plus récents: un aperçu

L'évolution du concept d'Espace en Mathématiques et en Physique ne s'arrête évidemment pas en 1930. Voici quelques développements qui mériteraient d'être exposés.

R

Développements plus récents: un aperçu

L'évolution du concept d'Espace en Mathématiques et en Physique ne s'arrête évidemment pas en 1930. Voici quelques développements qui mériteraient d'être exposés.

Renouveau de la Géométrie algébrique au XX-ème siècle avec les travaux d'Oscar Zariski (1899–1986), André Weil (1906–1998), théorie des schémas d'Alexandre Grothendieck (1928).

R

Développements plus récents: un aperçu

L'évolution du concept d'Espace en Mathématiques et en Physique ne s'arrête évidemment pas en 1930. Voici quelques développements qui mériteraient d'être exposés.

Renouveau de la Géométrie algébrique au XX-ème siècle avec les travaux d'Oscar Zariski (1899–1986), André Weil (1906–1998), théorie des schémas d'Alexandre Grothendieck (1928).

Superespaces et supersymétrie: la symétrie entre deux types de particules élémentaires, fermions et bosons.

R

Développements plus récents: un aperçu

L'évolution du concept d'Espace en Mathématiques et en Physique ne s'arrête évidemment pas en 1930. Voici quelques développements qui mériteraient d'être exposés.

Renouveau de la Géométrie algébrique au XX-ème siècle avec les travaux d'Oscar Zariski (1899–1986), André Weil (1906–1998), théorie des schémas d'Alexandre Grothendieck (1928).

Superespaces et supersymétrie: la symétrie entre deux types de particules élémentaires, fermions et bosons.

Théories des cordes et des supercordes.

R

Développements plus récents: un aperçu

L'évolution du concept d'Espace en Mathématiques et en Physique ne s'arrête évidemment pas en 1930. Voici quelques développements qui mériteraient d'être exposés.

Renouveau de la Géométrie algébrique au XX-ème siècle avec les travaux d'Oscar Zariski (1899–1986), André Weil (1906–1998), théorie des schémas d'Alexandre Grothendieck (1928).

Superespaces et supersymétrie: la symétrie entre deux types de particules élémentaires, fermions et bosons.

Théories des cordes et des supercordes.

Géométrie non commutative d'Alain Connes (1947).

R

Remerciements

Merci aux organisateurs des Journées “Inventer l’Espace” de m’avoir invité à présenter cet exposé,

R

Remerciements

Merci aux organisateurs des Journées “Inventer l’Espace” de m’avoir invité à présenter cet exposé,

et merci aux personnes qui ont bien voulu m’écouter.

R

Bibliographie

1. Cartan, É.,

(a) *Les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée*, I et II, Ann. Ec. Norm. **40**, 1923, pp. 325–342 et **41**, 1924, pp. 1–25 (se trouve aussi dans les *Œuvres complètes*, partie III 1, pp. 659–746 et 799-823).

(b) *Œuvres complètes*, parties III 1 et III 2, pp. 747–797, 825–862, 863–889, 1239–1243, Éditions du CNRS, Paris, 1984.

(c) *Leçons sur la théorie des spineurs*, Hermann, Paris, 1937. Traduit en anglais et réédité sous le titre *The theory of spinors*, Hermann, Paris, 1966.

2. Cartan, É. et Einstein, A., *Letters on absolute parallelism, 1929–1932*, Princeton University Press et Académie Royale de Belgique, Princeton, 1979.

Bibliographie

3. Clifford, W.K., *On the space theory of matter*, in*Mathematical papers*, Chelsea, New York, 1968.

4. Dugas, R., *Histoire de la Mécanique*, Éditions du Griffon, Neuchâtel, 1950. Réimprimé par les Éditions Jacques Gabay, Paris, 1996.

5. Ehresmann, Ch., *Les connexions infinitésimales*, Colloq. Topologie (Bruxelles 1950). Œuvres complètes, Partie I 2, pp. 179–205.

R

Bibliographie

6. Einstein, A.,

(a) *Sur l'électrodynamique des corps en mouvement*, traduit par M. Solovine d'après l'article des Annalen der Physik, XVII, 1905, Gauthier-Villars, Paris, 1925.

(b) *L'éther et la théorie de la Relativité* et *La Géométrie et l'expérience*, Gauthier-Villars, Paris, 1953.

(c) *Quatre conférences sur la théorie de la Relativité faites à l'université de Princeton* traduites par M. Solovine, Gauthier-Villars, Paris, 1925 (également publiées en anglais en un volume sous le titre *The Meaning of Relativity*, Princeton University Press, Princeton, 1922).

R

Bibliographie

6. Einstein, A. (suite),

(d) *Signification de la Relativité, compléments*, traduit par M. Solovine et M.-A. Tonnelat, Gauthier-Villars, 1960.

(e) *Théorie de la gravitation généralisée*, traduit par M. Solovine d'après le second appendice de la troisième édition de "The Meaning of Relativity", 1950. Textes rassemblés en un seul volume et réimprimés par les Éditions Jacques Gabay, Paris, 1994.

R

Bibliographie

7. Hauchecorne, B., et Suratteau, D., *Des mathématiciens de A à Z*, Ellipses, Paris, 1996.

8. Mach, E., *La Mécanique, exposé historique et critique de son développement*, ouvrage traduit de la quatrième édition allemande par E. Bertrand, Hermann, Paris, 1904.

Réimprimé par les Éditions Jacques Gabay, Paris, 1987.

9. Michelson, A. A. et Morley, E. W., American Journal of Science, **22** (1887), p. 333.

10. Millar, David, Ian, John and Margaret, *The Cambridge dictionary of scientists*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

R

Bibliographie

11. Minkowski, R. L. , Conférence faite à Cologne le 21 septembre 1908, citée et analysée dans le livre de René Dugas [4], pp. 468–473.

12. Newton, I., *Principes mathématiques de la Philosophie naturelle*, tomes I et II, traduit par Madame la Marquise du Chastellet, chez Desaint et Saillant, Paris, 1759. Réimprimé par les Éditions Jacques Gabay, Paris, 1990.

13. Painlevé, P. *Les axiomes de la Mécanique, examen critique, avec une note sur la propagation de la lumière*, Gauthier-Villars, Paris, 1922. Réimprimé par les Éditions Jacques Gabay, Paris, 1995.

R

Bibliographie

14. Poincaré, H.,

(a) *La science et l'hypothèse*, Ernest Flammarion, Paris, 1906. Nouveau tirage, 1968.

(b) *Science et méthode*, Ernest Flammarion, Paris, 1908. Réédité par les éditions Kimé, Paris, 1999.

(c) *La valeur de la science*, Ernest Flammarion, Paris, 1912.Nouveau tirage, 1970.

(d) *Dernières pensées*, Ernest Flammarion, Paris, 1913.

R

Bibliographie

14. Poincaré, H. (suite),

(e) *La Mécanique nouvelle*, livre réunissant en un seul volume le texte d'une conférence faite au congrès de Lille de l'Association française pour l'avancement des sciences en 1909, le mémoire du 23 juillet 1905 intitulé *Sur la dynamique de l'électron*, publié aux Rendiconti del Circolo matematico di Palermo **XXI** (1906) et une Note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, de même titre (séance du 15 juin 1905, **CXL**, 1905, p. 1504); Gauthier-Villars, Paris, 1924; réimprimé par les Éditions Jacques Gabay, Paris, 1989.

(f) *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, tomes I, II et III, Gauthier-Villars, Paris, 1892, 1893, 1899, réimprimé par la Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, Paris, 1987.

Bibliographie

15. Riemann, B.,

(a) *Théorie générale des fonctions d'une grandeur variable complexe*, Dissertation inaugurale, Göttingue, 1851. Œuvres de Riemann, traduction L. Laugel, première partie, pages 1 à 60. Gauthier-Villars et fils, Paris, 1898. Réédité par Jacques Gabay, Sceaux, 1990.

(b) *Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie*, Mémoire de la Société Royale des Sciences de Göttingue, T. XIII, 1867. Œuvres de Riemann, traduction J. Hoüel, deuxième partie, pages 280 à 299. Gauthier-Villars et fils, Paris, 1898. Réédité par Jacques Gabay, Sceaux, 1990.

R

Bibliographie

16. Simaan, A. et Fontaine, J. *L'image du monde des Babyloniens à Newton*, AdaptÉditions, Paris, 1998.

17. Varadarajan, V.S., *Supersymmetry for Mathematicians: An Introduction*, Courant Lecture Notes in Mathematics 11, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York Unversity, New York and American Mathematical Society, Providence, 2004.

R

Bibliographie

18. Weyl, H. *The concept of a Riemann surface*, première édition en allemand 1911, réédité en anglais par Addison Wesley, Reading, 1955.

19. Weyl, H. *Temps, espace, matière*, traduit de la quatrième édition allemande par G. Juvet et R. Leroy, 1922; réimprimé par la Librairie scientifique Albert Blanchard, Paris, 1958.

20. Weyl, H. *The theory of groups and quantum mechanics*, traduit de la deuxième édition allemande (1928) par H.P. Robertson, 1931; réédité par Dover, New York, 1950.

R