

# Systèmes hamiltoniens et géométrie symplectique

Charles-Michel Marle

Université Pierre et Marie Curie

19 mars 2013

# Sommaire

## Propriétés générales des structures symplectiques

Qu'est-ce qu'une structure symplectique ?

Exemples de structures symplectiques

Champs de vecteurs hamiltoniens

Crochets de Poisson

## L'émergence du concept de structure symplectique : Lagrange, Poisson, Cauchy, Hamilton

Les éléments orbitaux des planètes

Au delà de l'approximation képlérienne

Ce que Lagrange et Poisson ont découvert

Hamilton et l'optique géométrique

Hamilton et les systèmes mécaniques conservatifs

Cauchy et le formalisme hamiltonien

## Quelques développements (relativement) récents

Méthodes géométriques en Mécanique

Structures de Poisson

Symétries et application moment

La réduction symplectique

Quantification

Structures de Dirac

Groupes de Lie-Poisson

Groupoïdes symplectiques et groupoïdes de Poisson

Topologie symplectique

## Remerciements

## Bibliographie

# Qu'est-ce qu'une structure symplectique ? (1)

## Définition

Une *structure symplectique* sur une variété différentiable  $M$  est la structure déterminée sur cette variété par la donnée d'une forme différentielle antisymétrique  $\omega$ , de degré 2, non dégénérée et fermée. On dit alors que  $(M, \omega)$  est une *variété symplectique*.

## Explications

En chaque point  $x \in M$ ,  $\omega(x)$  est donc une forme bilinéaire qui, à tout couple  $(u, v)$  de vecteurs tangents en  $x$  à  $M$  fait correspondre un nombre réel  $\omega(x)(u, v)$ , qui pour  $x$  fixé, dépend linéairement de chacune des variables  $u$  et  $v$ .

L'antisymétrie de  $\omega$  signifie que  $\omega(x)(v, u) = -\omega(x)(u, v)$ .

La non dégénérescence de  $\omega$  signifie que pour tout  $x \in M$  et tout vecteur  $u$  non nul tangent en  $x$  à  $M$ , il existe un autre vecteur  $v$  tangent en  $x$  à  $M$  tel que  $\omega(x)(u, v) \neq 0$ .

## Qu'est-ce qu'une structure symplectique ? (2)

Dire que  $\omega$  est fermée signifie que sa différentielle extérieure  $d\omega$  (qui est une forme différentielle de degré 3) est identiquement nulle.

### Conséquences

La non dégénérescence de  $\omega$  a une conséquence importante : la dimension de  $M$  est nécessairement paire  $2n$ .

La non dégénérescence et la fermeture de  $\omega$  ont pour conséquence l'existence, au voisinage de chaque point de  $M$ , de coordonnées locales privilégiées (dites *coordonnées de Darboux*) dans lesquelles les composantes de  $\omega$  (qui forment une matrice  $2n \times 2n$ ) sont des constantes. Plus précisément, on peut s'arranger pour que ces composantes soient égales à 1,  $-1$  ou 0 :

## Qu'est-ce qu'une structure symplectique ? (3)

En tout point  $x$  du domaine de définition d'un système de coordonnées de Darboux  $(x^1, \dots, x^{2n})$ , on a,

$$\omega(x) \left( \frac{\partial}{\partial x^{n+i}}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = -\omega(x) \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^{n+i}} \right) = 1 \quad (1 \leq i \leq n),$$

et

$$\omega(x) \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = 0 \quad \text{si } |j - i| \neq n, \quad (1 \leq i, j \leq 2n).$$

## Exemples de structures symplectiques (1)

- Sur une surface orientée plongée dans un espace euclidien de dimension 3, la *forme élément d'aire* est symplectique.
- Soit  $V$  un espace vectoriel réel de dimension  $n$ , et  $V^*$  son dual. La somme directe  $V \oplus V^*$  possède une structure symplectique naturelle déterminée par la forme bilinéaire

$$\omega((x_1, \zeta_1), (x_2, \zeta_2)) = \zeta_1(x_2) - \zeta_2(x_1).$$

- Soit  $N$  une variété différentiable de dimension  $n$ . Il existe sur son *fibré cotangent*  $T^*N$  une forme symplectique naturelle  $\omega_{T^*N}$ , différentielle extérieure de la 1-forme de Liouville. Si  $(x^1, \dots, x^n)$  sont les coordonnées locales dans une carte de  $N$  et  $(x^1, \dots, x^n, p_1, \dots, p_n)$  les coordonnées locales dans la carte associée de  $T^*N$ , on a

$$\omega_{T^*N} = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dx^i.$$

## Exemples de structures symplectiques (2)

- Le plan complexe  $\mathbb{C}$  est naturellement muni d'une forme hermitienne

$$\eta(z_1, z_2) = z_1 \overline{z_2}.$$

Écrivons  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$  et séparons les parties réelle et imaginaire de  $\eta(z_1, z_2)$  :

$$\eta(z_1, z_2) = (x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(y_1 x_2 - y_2 x_1).$$

Le plan complexe  $\mathbb{C}$  a une structure d'espace vectoriel réel de dimension 2 sous-jacente, le complexe  $z = x + iy$  étant identifié au point  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$ . La donnée de la forme hermitienne  $\eta$  sur  $\mathbb{C}$  équivaut à la donnée sur  $\mathbb{R}^2$  d'un produit scalaire euclidien  $g$  et d'une forme symplectique  $\omega$ . On a

$$\begin{aligned}\eta(z_1, z_2) &= (x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(y_1 x_2 - y_2 x_1) \\ &= g((x_1, y_1), (x_2, y_2)) + i\omega((x_1, y_1), (x_2, y_2)).\end{aligned}$$

## Exemples de structures symplectiques (3)

- Plus généralement, une variété kählérienne de dimension complexe  $n$ , c'est-à-dire une variété complexe munie d'une forme hermitienne, lorsqu'on la considère comme variété réelle de dimension  $2n$ , est automatiquement munie d'une métrique riemannienne et d'une forme symplectique, données respectivement par la partie réelle et par la partie imaginaire de la forme hermitienne.

Inversement, une variété symplectique ne peut pas toujours être munie d'une structure de variété complexe et d'une forme hermitienne dont la forme symplectique est la partie imaginaire. Elle peut toutefois toujours être munie d'une *structure presque complexe* qui lui confère des propriétés voisines de celles des variétés kählériennes (mais avec des fonctions de transition dans un changement de carte qui ne sont pas holomorphes). Mikhaïl Gromov s'en est servi pour élaborer la théorie des *courbes pseudo-holomorphes*.



## Champs de vecteurs hamiltoniens (1)

À toute fonction différentiable  $f$  définie sur une variété symplectique  $(M, \omega)$  on peut associer un champ de vecteurs  $\mathcal{X}_f$ , appelé *champ de vecteurs hamiltonien associé à  $f$* , défini comme l'unique champ de vecteurs tel que

$$i(\mathcal{X}_f)\omega = -df .$$

L'expression locale de  $\mathcal{X}_f$  dans un système de coordonnées locales de Darboux  $(x^1, \dots, x^{2n})$  est

$$\mathcal{X}_f = \frac{\partial f}{\partial x^{n+i}} \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^{n+i}} .$$

L'équation différentielle déterminée par  $\mathcal{X}_f$ , appelée *équation de Hamilton* pour le hamiltonien  $f$ , s'écrit donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x^{n+i}}, \\ \frac{dx^{n+i}}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial x^i}, \end{array} \right. \quad (1 \leq i \leq n).$$

## Crochets de Poisson (1)

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions différentiables définies sur une variété symplectique  $(M, \omega)$ ,  $\mathcal{X}_f$  et  $\mathcal{X}_g$  les champs de vecteurs hamiltonien associés.

### Définition

On appelle *crochet de Poisson* des fonctions  $f$  et  $g$  la fonction différentiable  $\{f, g\}$  définie par les expressions équivalentes

$$\{f, g\} = i(\mathcal{X}_f) dg = -i(\mathcal{X}_g) df = \omega(\mathcal{X}_f, \mathcal{X}_g).$$

### Propriétés

Sur l'espace des fonctions différentiables sur  $M$ , le crochet de Poisson est une loi de composition bilinéaire et antisymétrique

$$\{g, f\} = -\{f, g\},$$

qui vérifie l'*identité de Leibniz* vis-à-vis du produit ordinaire

$$\{f, g_1 g_2\} = \{f, g_1\} g_2 + g_1 \{f, g_2\}.$$

## Crochets de Poisson (2)

Le crochet de Poisson vérifie aussi l'*identité de Jacobi* (qui est une sorte d'identité de Leibniz vis-à-vis de ce crochet lui-même)

$$\{f, \{g, h\}\} = \{\{f, g\}, h\} + \{g, \{f, h\}\},$$

qui s'écrit aussi (compte tenu de l'antisymétrie)

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0.$$

Le crochet de Poisson permet d'écrire de manière très simple l'équation de Hamilton pour le champ hamiltonien  $\mathcal{X}_f$ . Soit  $t \mapsto \varphi(t)$  une courbe intégrale de cette équation. On a alors, pour toute fonction différentiable  $g$ ,

$$\frac{dg(\varphi(t))}{dt} = \{f, g\}(\varphi(t)).$$

# L'émergence du concept de structure symplectique

Le mot *symplectique* a été utilisé pour la première fois pour désigner les structures aujourd'hui connues sous ce nom en mathématiques par Hermann Weyl, dans son livre "The classical groups", publié en 1939. Il provient d'une racine grecque signifiant *complexe* (mot provenant d'une racine latine). Hermann Weyl voulait éviter toute confusion avec la notion de structure complexe, déjà très solidement établie en mathématiques, tout en soulignant la proche parenté entre ces deux notions.

L'apparition du concept de structure symplectique en mathématiques est plus ancienne : Joseph-Louis Lagrange l'avait déjà découvert vers 1809, lors de ses travaux sur la variation des éléments orbitaux des planètes du système solaire. Je vais brièvement rappeler comment cette découverte a été faite.

# Les éléments orbitaux des planètes (1)

En première approximation, l'orbite de chaque planète du système solaire, dans le référentiel lié au Soleil et aux étoiles lointaines, est une ellipse dont le Soleil est un foyer : c'est la *première loi de Kepler*.

La *seconde loi de Kepler*, aussi appelée *loi des aires*, décrit comment a lieu ce mouvement en fonction du temps : l'aire balayée par le segment de droite qui joint la planète au Soleil est une fonction affine du temps.

La *troisième loi de Kepler* affirme que dans le système solaire, le carré de la période de chaque planète est proportionnel au cube du demi-grand axe. C'est cette loi qui permet de déterminer, pour chaque planète, l'aire balayée par le segment de droite qui la joint au Soleil en une unité de temps, lorsqu'on connaît la valeur du demi-grand axe. La constante de proportionnalité qui intervient dans cette loi s'exprime en fonction de la constante d'attraction gravitationnelle et de la masse du Soleil.

## Les éléments orbitaux des planètes (2)

Dans cette approximation, la position d'une planète dans l'espace, à tout instant, est parfaitement déterminée dès qu'on connaît ses six *éléments orbitaux* :

- le plan de l'orbite est d'abord déterminé par la donnée d'un vecteur unitaire normal à ce plan (ce qui compte pour 2 éléments orbitaux) ; cette donnée détermine aussi une orientation du plan de l'orbite, donc le sens dans lequel la planète tourne autour du Soleil ;
- pour préciser la forme de l'orbite et sa position dans le plan qui la contient, on peut utiliser le *vecteur excentricité*, improprement appelé *vecteur de Laplace* ou *vecteur de Runge-Lenz* car il a été découvert par **Jakob Hermann (1678–1753)** ; c'est un vecteur sans dimension, parallèle au demi-grand axe, dirigé du Soleil vers le périhélie, et dont la longueur est égale à l'excentricité de l'orbite ; ses composantes (dans un repère quelconque du plan de l'orbite) constituent deux autres éléments orbitaux ;

## Les éléments orbitaux des planètes (3)

- un cinquième élément orbital précise la taille de l'orbite ; on peut, par exemple, choisir la longueur du demi-grand axe ;
- la loi du mouvement étant connue, pour préciser la position de la planète sur son orbite à chaque instant, il suffit de connaître sa position à un instant de référence choisi comme origine du temps, par exemple le premier janvier 1900 à midi ; c'est le sixième et dernier élément orbital.

On voit ainsi qu'en dehors des singularités (orbites rectilignes passant par le Soleil) l'ensemble de tous les mouvements bornés (ne s'éloignant pas à l'infini) possibles d'une planète autour du Soleil est, dans l'approximation képlérienne, une variété différentiable de dimension 6. Je l'appellerai *variété des mouvements képlériens*. Chaque mouvement possible est un *point* de la variété des mouvements képlériens, et ses éléments orbitaux sont les *coordonnées locales* de ce point dans une carte de cette variété.

## Au delà de l'approximation képlérienne (1)

L'approximation képlérienne ne tient compte que de l'attraction exercée par le Soleil, considéré comme fixe, sur chaque planète. Pour aller au delà de cette approximation, il faut tenir compte aussi de l'attraction exercée par chaque planète sur toutes les autres planètes et sur le Soleil.

Pour ce faire, les mathématiciens et astronomes du XVIII-ème siècle ont considéré les éléments orbitaux des planètes non plus comme constantes, mais comme lentement variables. Le mouvement de chaque planète est donc décrit, non plus par un point fixe sur la variété des mouvements képlériens, mais par une courbe tracée sur cette variété, parcourue en fonction du temps.



## Au delà de l'approximation képlérienne (2)

Pierre Simon Laplace (1749–1827), Joseph Louis Lagrange (1736–1813) et Siméon-Denis Poisson (1781–1840), parmi d'autres, ont cherché à déterminer lois qui régissent la variation, au cours du temps, des éléments orbitaux des planètes. Dans le langage mathématique actuel, on peut dire qu'ils ont cherché à déterminer, sur la variété des mouvements képlériens, les courbes représentant les mouvements vrais des planètes. Le plus souvent ils utilisaient pour cela des développements en série dont ils calculaient les premiers termes. Un des premiers résultats importants, dû à Laplace, date de 1773 : au premier ordre, la période et le demi-grand axe des orbites des planètes ne varient pas au cours du temps. En 1774, Lagrange calcula la variation de la position de nœuds et de l'inclinaison de l'orbite. Jusqu'en 1784, Laplace et Lagrange améliorèrent ces résultats et calculèrent les variations séculaires des éléments orbitaux des planètes.

## Au delà de l'approximation képlérienne (3)

Puis, pendant plus de 20 ans, Lagrange ne s'est plus intéressé à ce problème. Le 20 juin 1808 la présentation à l'Académie des Sciences, par Siméon-Denis Poisson (1781–1840), d'un mémoire intitulé **“Sur les inégalités séculaires des moyens mouvements des planètes”** le réveille brutalement. Poisson montre qu'on peut se passer d'hypothèses simplificatrices faites par Lagrange dans ses travaux des années 1776–1784.

Le 22 août 1808, Lagrange présente à l'Académie son “Mémoire sur la théorie de la variation des éléments des planètes”, dans lequel il rend hommage à Poisson et écrit  
“... Il me parut que le résultat qu'il venait de trouver par le moyen des formules qui représentent le mouvement elliptique était un résultat analytique dépendant de la forme des équations différentielles et des conditions de la variabilité des constantes, et qu'on devait y arriver par la seule force de l'Analyse, sans connaître les expressions particulières des quantités relatives à l'orbite elliptique”.

## Au delà de l'approximation képlérienne (4)

Le 13 mars 1809 Lagrange présente à l'Académie des sciences son "Mémoire sur la théorie générale de la variation des constantes arbitraires dans tous les problèmes de mécanique", dans lequel il généralise considérablement les résultats de son mémoire précédent. Il considère un système mécanique conservatif (aujourd'hui on dit un *système lagrangien classique*) à  $n$  degrés de liberté qui, dans une première approximation, est décrit par la donnée de l'énergie cinétique  $T$  et d'un potentiel  $V$ . Le potentiel  $V$  est une fonction de  $n$  variables (les coordonnées locales décrivant la configuration du système), tandis que l'énergie cinétique est fonction de ces  $n$  variables et de leurs dérivées par rapport au temps, donc de  $2n$  variables.

La solution générale de ce système dépend de  $2n$  constantes arbitraires  $a_1, \dots, a_{2n}$ . Dans le cas du mouvement des planètes, ces constantes sont les *éléments orbitaux*. Ces constantes forment un système de coordonnées locales sur la *variété des mouvements du système simplifié*.

## Au delà de l'approximation képlérienne (5)

Mais ce n'est qu'en première approximation que  $T$  et  $V$  décrivent le système mécanique considéré : Lagrange suppose que  $V$  doit être remplacé par  $V + \Omega$ , le terme additionnel  $\Omega$  pouvant être fonction des  $n$  coordonnées locales qui décrivent la configuration du système, et aussi du temps ; en 1837 Augustin Louis Cauchy (1789–1857) montrera qu'on peut supposer que l'énergie cinétique  $T$  doit elle aussi être remplacée par  $T + T'$ .

L'expression de la solution générale du système simplifié

$$r = r(t, a_1, \dots, a_{2n}),$$

où  $a_1, \dots, a_{2n}$  sont les  $2n$  constantes dont dépend cette solution générale, est utilisée aussi pour exprimer la solution générale du système complet. Lagrange l'écrit sous la forme

$$r = r(t, a_1(t), \dots, a_{2n}(t)),$$

où  $t \mapsto a_i(t)$  ( $1 \leq i \leq 2n$ ) sont des fonctions du temps (et de  $2n$  constantes) qu'il reste à déterminer.

## Au delà de l'approximation képlérienne (6)

Lagrange montre qu'à chaque paire ordonnée  $(a_i, a_j)$  ( $1 \leq i, j \leq 2n$ ) de fonctions prises parmi les fonctions coordonnées locales  $a_1, \dots, a_{2n}$  sur la variété des mouvements simplifiés, on peut faire correspondre une troisième fonction sur cette variété, qu'il note  $(a_i, a_j)$ . On dit aujourd'hui que  $(a_i, a_j)$  est la *parenthèse de Lagrange* des fonctions coordonnées  $a_i$  et  $a_j$ . Son expression dépend de  $T$  et de  $V$ , mais non de  $\Omega$ . Dans le langage actuel, les parenthèses de Lagrange  $(a_i, a_j)$  ( $1 \leq i, j \leq 2n$ ) sont les *composantes de la forme symplectique canonique* sur la variété des mouvements simplifiés, dans la carte dont  $a_1, \dots, a_{2n}$  sont les coordonnées locales.

Lagrange montre alors que les fonctions  $t \mapsto a_i(t)$  ( $1 \leq i \leq 2n$ ) sont solutions du système différentiel

$$\sum_{j=1}^{2n} (a_i, a_j) \frac{da_j(t)}{dt} = \frac{\partial \Omega_i}{\partial a_i}.$$

## Au delà de l'approximation képlérienne (7)

Ce système différentiel n'est pas résolu par rapport aux dérivées  $\frac{da_i(t)}{dt}$ . Lagrange écrit qu'en le résolvant on obtiendrait un système différentiel de la forme

$$\frac{da_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{2n} L_{ij} \frac{\partial \Omega_i}{\partial a_j}, \quad 1 \leq i \leq 2n,$$

où les  $L_{ij}$  sont des fonctions définies sur la variété des mouvements simplifiés, qui ne dépendent pas directement du temps. Cependant, il n'en donne pas l'expression.

## Au delà de l'approximation képlérienne (8)

Le 16 octobre 1809 Poisson présente à l'Académie des sciences un mémoire intitulé "Sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de mécanique", dans lequel il comble la lacune laissée par Lagrange. Il montre qu'en utilisant la matrice inverse de la matrice formée par les parenthèses de Lagrange  $(a_i, a_j)$ , on peut définir une loi de composition bilinéaire et antisymétrique  $(f, g) \mapsto \{f, g\}$  sur l'espace des fonctions différentiables définies sur la variété des mouvements simplifiés. Aujourd'hui, la fonction  $\{f, g\}$  est appelée *crochet de Poisson* des fonctions  $f$  et  $g$ .

Le 19 février 1810 Lagrange présente à l'Académie un "Second mémoire sur la théorie de la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique" dans lequel il exprime le système différentiel vérifié par les fonctions  $t \mapsto a_i(t)$  en utilisant le crochet de Poisson :

$$\frac{da_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{2n} \{a_i, a_j\} \frac{\partial \Omega_j}{\partial a_j}, \quad 1 \leq i \leq 2n.$$

## Au delà de l'approximation képlérienne (9)

Il aurait pu écrire ce système encore plus simplement

$$\frac{da_i(t)}{dt} = \{a_i, \Omega\}, \quad 1 \leq i \leq 2n.$$

car le crochet de Poisson de deux fonctions différentiables quelconques définies sur la variété des mouvements simplifiés a un sens (alors que la parenthèse de Lagrange de deux fonctions n'a de sens que si ces fonctions sont choisies parmi  $2n$  fonctions formant un système de coordonnées locales, et dépend non seulement de ces deux fonctions, mais de l'ensemble du système de coordonnées locales).



## Ce que Lagrange et Poisson ont découvert

En résumé, Lagrange et Poisson ont montré vers 1810 que la variété des mouvements képlériens d'une planète autour du Soleil possédait une *structure symplectique naturelle*. Puis ils ont étendu ce résultat à tous les *systèmes mécaniques conservatifs*.

Ils ont montré aussi que lorsqu'on étudie un système mécanique conservatif en faisant, dans une première étape, des hypothèses simplificatrices permettant d'exprimer la solution générale du système en fonction du temps et d'un certain nombre (pair)  $2n$  de paramètres, sous la forme  $r = r(t, a_1, \dots, a_{2n})$ , puis qu'on utilise, pour la solution générale du système vrai (non simplifié), la même expression mais en considérant les paramètres  $a_1, \dots, a_{2n}$  non plus comme des constantes, mais comme des fonctions du temps, la courbe  $t \mapsto (a_1(t), \dots, a_{2n}(t))$ , paramétrée par le temps, tracée sur la variété symplectique des mouvements du système simplifié est solution d'une *équation différentielle de Hamilton*.

En 1810, *William Rowan Hamilton était âgé de 5 ans* environ.

## Hamilton et l'optique géométrique (1)

En 1824, le mathématicien irlandais William Rowan Hamilton (1805–1865) présente à la *Royal Irish Academy* un mémoire intitulé *Theory of systems of rays* dans lequel il élabore une théorie générale de l'Optique géométrique. Ce mémoire est suivi de deux suppléments présentés en 1830 et d'un troisième présenté en 1832.

Hamilton considère un rayon lumineux  $\gamma$  qui se propage d'un point  $a$  à un point  $b$  de l'espace, et subit entre ces deux points un nombre quelconque de réflexions et de réfractions. Les surfaces sur lesquelles, ou à la traversée desquelles, ont lieu les réflexions ou les réfractions sont supposées différentiables. Entre deux réflexions ou réfractions, le milieu dans lequel se propage le rayon a un indice de réfraction  $n$  fonction différentiable du point considéré et de la direction du rayon lumineux. Hamilton lui associe une *action*

$$S(\gamma) = \int_{\gamma} n \, ds,$$

où  $ds$  est la différentielle de la longueur d'arc.

## Hamilton et l'optique géométrique (2)

Hamilton admet, comme un *principe*, le fait que l'action  $S(\gamma)$  est stationnaire pour toutes les variations infinitésimales de  $\gamma$  à extrémités fixées. Il élabore pour trouver les extrémals de l'action, la méthode aujourd'hui connue sous le nom de *formalisme hamiltonien*.

Lorsque le rayon lumineux traverse un instrument d'optique, on peut supposer qu'avant son entrée dans l'instrument et après sa sortie, il se propage en ligne droite dans un milieu d'indice de réfraction constant. Hamilton montre que l'ensemble des droites orientées de l'espace est une variété symplectique (qu'on peut identifier au fibré cotangent à la sphère  $S^2$ ) et que la transformation qui associe, à la droite orientée représentant le rayon entrant dans l'instrument la droite orientée représentant le rayon sortant, est une *transformation symplectique*.

# Hamilton et les systèmes mécaniques conservatifs (1)

En avril puis en octobre 1834, Hamilton présente à la *Royal Society* deux mémoires intitulés *On a general method in Dynamics* et *Second essay on a general method in Dynamics* dans lesquels il applique aux systèmes mécaniques la méthode qu'il avait employée en Optique géométrique. Le second mémoire est le plus facile à lire. Il considère un système mécanique dont il note  $T$  l'énergie cinétique et  $U$  le potentiel. Il écrit les équations de Lagrange sous la forme

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \eta'_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \eta_i} = \frac{\partial U}{\partial \eta_i}.$$

Puis il définit les moments conjugués aux coordonnées locales  $\eta_i$

$$\varpi_i = \frac{\partial T}{\partial \eta'_i}$$

et appelle  $F$  l'énergie cinétique exprimée en fonction, non plus des  $\eta_i$  et  $\eta'_i$ , mais en fonction des  $\eta_i$  et  $\varpi_i$ . Il définit la fonction  $H(\eta_i, \varpi_i)$ , aujourd'hui appelée *hamiltonien*

$$H(\eta_i, \varpi_i) = F(\eta_i, \varpi_i) - U(\eta_i).$$

## Hamilton et les systèmes mécaniques conservatifs (2)

Il montre alors que les équations du mouvement s'écrivent sous la forme

$$\frac{d\eta_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \varpi_i}, \quad \frac{d\varpi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \eta_i},$$

aujourd'hui appelées *équations de Hamilton*.

Il écrit l'intégrale d'action, dont les mouvements sont les extrémales, sous une forme nouvelle

$$S = \int_{t_0}^{t_1} (T + U) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left( \sum_i \varpi_i \frac{\partial H}{\partial \varpi_i} - H \right) dt.$$

En faisant varier  $t_0$  et  $t_1$  Hamilton montre que  $S$ , qu'il appelle *fonction principale*, est solution de deux équations aux dérivées partielles, aujourd'hui appelées *équations d'Hamilton-Jacobi*.

## Cauchy et le formalisme hamiltonien

Dans une courte *Note sur la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique* publiée en 1837 dans le Journal de mathématiques pures et appliquées, Augustin Louis Cauchy (1789–1857) expose de manière très claire la méthode de variation des constantes de Lagrange et Poisson. Il utilise résolument, pour cela, le *formalisme hamiltonien*, sans citer Hamilton. Il écrit que sa Note est extraite d'un long Mémoire sur la mécanique céleste présenté en 1830 à l'Académie des Sciences de Turin.

Alain Albouy, qui a examiné ce mémoire, pense que Cauchy a précédé de peu Hamilton dans l'application du formalisme hamiltonien aux problèmes de mécanique (mais pas aux problèmes d'optique géométrique).

## Quelques développements (relativement) récents

Je vais maintenant parler des développements apparus pendant la seconde moitié du XX-ème siècle dans le domaine de la géométrie symplectique. Mon exposé ne prétend pas être exhaustif.

Les développements dont je vais parler ne sont peut-être pas les plus importants. Simplement, ce sont ceux que je connais au moins un peu.

# Méthodes géométriques en Mécanique (1)

Durant le XX-ème siècle l'utilisation de méthodes géométriques, utilisant la structure symplectique de l'espace des phases d'un système hamiltonien pour résoudre des problèmes de Mécanique, s'est considérablement développée. On peut citer

- le théorème d'Arnold-Liouville, découvert par Joseph Liouville (1809–1882), précisé par Vladimir Arnold, qui montre que l'espace des phases d'un système hamiltonien complètement intégrable est feuilleté en tores lagrangiens invariants, le mouvement sur chaque tore étant quasi-périodique ;
- l'existence de “coordonnées actions-angles” dans l'espace des phases des systèmes complètement intégrables, au moyen desquelles les équations du mouvement s'écrivent très simplement ;



## Méthodes géométriques en Mécanique (2)

- le théorème KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) énoncé par Andrei Kolmogorov (1903-1997) en 1954, et démontré dix ans plus tard indépendamment par Jürgen Moser et Vladimir Arnold ; ce théorème montre que dans l'espace des phases de systèmes voisins de systèmes complètement intégrables, de nombreux tores lagrangiens sur lesquels le mouvement est quasi-périodique subsistent ; en dehors de ces tores, les courbes intégrales du système sont beaucoup plus complexes (phénomène appelé *diffusion d'Arnold*) ;
- les très beaux articles de Stephen Smale "Topology and Mechanics" (partie I 1970, partie II 1979) et de Vladimir Arnold "Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits" (1966), qui utilisent des méthodes géométriques et topologiques pour étudier la stabilité des mouvements.

# Structures de Poisson (1)

Le besoin de généraliser la notion de structure symplectique est apparu très tôt (voir par exemple l'article de Paul Dirac *Generalized Hamiltonian dynamics* publié en 1950). On rencontre en effet très souvent dans les applications des situations dans lesquelles une variété, construite à partir d'une variété symplectique par produit, par quotient et (ou) par restriction à une sous-variété, possède une structure, plus générale qu'une structure symplectique, permettant d'associer un champ de vecteurs à chaque fonction différentiable. On savait d'autre part depuis longtemps que sur une variété de contact (non symplectique puisque de dimension impaire) on peut associer à chaque fonction différentiable un champ de vecteurs et définir un *crochet* de deux fonctions.

À partir de 1975, André Lichnerowicz a défini et étudié plusieurs généralisations des variétés symplectiques, et a proposé, pour les désigner, les noms de *variété canonique*, *variété de Poisson*, *variété de Jacobi*, *variété localement conformément symplectique*, ...

## Structures de Poisson (2)

Dans un article intitulé *Local Lie algebras* publié en 1976, Alexandre Kirillov a déterminé toutes les structures possibles permettant de munir l'algèbre des fonctions différentiables sur une variété, d'un crochet faisant de cette algèbre une algèbre de Lie locale (cela signifie que la valeur en un point du crochet de deux fonctions ne dépend que des valeurs prises par ces fonctions sur un voisinage arbitrairement petit de ce point). Ces structures sont peu nombreuses : ce sont celles que Lichnerowicz appelle *variétés de Poisson* et *variétés de Jacobi*.

Une *structure de Poisson* sur une variété différentiable  $M$  est déterminée par la donnée d'une loi de composition bilinéaire et antisymétrique, appelée *crochet de Poisson*, sur l'espace des fonctions différentiables, vérifiant les identités de Leibniz

$$\{f, g_1 g_2\} = \{f, g_1\} g_2 + g_1 \{f, g_2\}$$

et de Jacobi

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0.$$

## Structures de Poisson (3)

Dans un article intitulé *The local structure of Poisson manifolds* (1983) Alan Weinstein a montré qu'une variété de Poisson  $P$  est feuilletée, par un feuilletage généralisé (dont les feuilles ne sont pas toutes de la même dimension). Chaque feuille de ce feuilletage est munie d'une structure symplectique. La valeur, en un point d'une feuille, du crochet de Poisson de deux fonctions définies sur  $P$  ne dépend que des restrictions de ces fonctions à la feuille considérée, et se calcule en utilisant la structure symplectique de cette feuille.

En termes moins rigoureux mais plus parlants, on peut dire qu'une variété de Poisson est une juxtaposition de variétés symplectiques, arrangées de manière telle que leur réunion soit une variété différentiable.

On rencontre aussi des structures de Poisson plus générales définies sur des ensembles qui ne sont plus nécessairement des variétés différentiables : voir le livre récent (2013) *Poisson structures* de Camille Laurent, Anne Pichereau et Pol Vanhaecke).

# Structures de Poisson (4)

## Exemples de structures de Poisson

1. Toute variété symplectique est automatiquement de Poisson.
2. Le dual  $\mathcal{G}^*$  d'une algèbre de Lie de dimension finie  $\mathcal{G}$  possède une structure de Poisson naturelle, dite *canonique* ou de *Kirillov-Kostant-Souriau*. Le crochet de Poisson de deux fonctions différentiables  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathcal{G}^*$  est donné par

$$\langle \{f, g\}(\zeta), X \rangle = \left\langle \zeta, [df(z), dg(z)] \right\rangle. \quad \zeta \in \mathcal{G}^*, \quad X \in \mathcal{G}.$$

Les feuilles symplectiques de  $\mathcal{G}^*$  sont les orbites coadjointes.

3. La structure de Poisson canonique de  $\mathcal{G}^*$  peut être modifiée au moyen d'un cocycle symplectique.

## Symétries et application moment (1)

L'action d'un groupe de Lie  $G$  sur une variété symplectique  $(M, \omega)$  est dite *hamiltonienne* lorsque les générateurs infinitésimaux de l'action (appelés parfois *champs fondamentaux*) sont des champs de vecteurs hamiltoniens sur  $M$ . On peut alors définir une application  $J$  de  $M$  dans le dual  $\mathcal{G}^*$  de l'algèbre de Lie  $\mathcal{G}$  du groupe  $G$ , déterminée à addition d'une constante (élément de  $\mathcal{G}^*$  près) appelée *application moment*. Cette application a été utilisée, notamment, par par Jean-Marie Souriau dans son livre *Structure des systèmes dynamiques* (1969), et par Stephen Smale, dans le formalisme lagrangien, dans son article *Topology and Mechanics* (1970).

Lorsque un hamiltonien  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$  est invariant pour l'action du groupe  $G$ , l'application moment garde une valeur constante sur chaque courbe intégrale du champ  $\mathcal{X}_H$ . Cette propriété est une forme géométrique du célèbre *théorème de Noether*.

## Symétries et application moment (2)

### Quelques propriétés du moment

1. Pour tout  $x \in M$ ,  $\ker T_x J$  est l'*orthogonal symplectique* de l'espace tangent en  $x$  à l'orbite de l'action de  $G$  contenant ce point.
2. Lorsque la variété  $M$  est connexe, il existe une action affine du groupe  $G$  sur le dual  $\mathcal{G}^*$  de son algèbre de Lie qui rend le moment  $J$  équivariant. La partie linéaire de cette action est l'action coadjointe, et le terme qui s'y ajoute est un *cocycle symplectique*. Lorsque c'est un cobord on peut, en modifiant  $J$  par addition d'un élément constant convenable de  $\mathcal{G}$ , faire disparaître ce cocycle et rendre le moment équivariant pour l'action coadjointe de  $G$  sur  $\mathcal{G}^*$ .
3. Le moment est une *application de Poisson* ( $\mathcal{G}^*$  étant muni de sa structure de Poisson canonique, éventuellement modifiée au moyen du cocycle qui apparaît dans l'action affine qui rend  $J$  équivariant).

## Symétries et application moment (3)

### Quelques propriétés du moment (suite)

**4.** Michael Atiyah (1982), Victor Guillemin et Shlomo Sternberg (1982 et 1984) ont montré que l'image du moment de l'action hamiltonienne d'un tore sur une variété symplectique compacte est un polytope convexe. Frances Kirwan a généralisé ce résultat en 1984 : l'image du moment de l'action hamiltonienne d'un groupe de Lie compact avec une chambre de Weyl de l'algèbre de Lie d'un tore maximal de ce groupe est un polytope convexe.

**5.** Thomas Delzant (1988) a donné les conditions nécessaires et suffisantes que doit vérifier un polytope convexe du dual de l'algèbre de Lie d'un tore pour être l'image du moment d'une action hamiltonienne de ce tore sur une variété symplectique compacte. Il a montré que lorsque ces conditions sont vérifiées, la variété symplectique et l'action sont entièrement déterminées par la donnée du polytope.



## La réduction symplectique (1)

L'utilisation d'intégrales premières pour faciliter la détermination des courbes intégrales de systèmes hamiltoniens est très ancienne. Une formulation géométrique moderne de cette procédure a été présentée par Jerzy Sniatycki et Włodzimierz Tulczyjew en 1972 et, dans le cas où les intégrales premières sont les composantes du moment de l'action d'un groupe de Lie, par Kenneth Meyer (1973), Jerrold Marsden et Alan Weinstein (1974).

Soit  $(M, \omega)$  une variété symplectique sur laquelle un groupe de Lie  $G$  agit par une action hamiltonienne, dont  $J : M \rightarrow \mathcal{G}^*$  est un moment. Si  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$  est un hamiltonien invariant par l'action de  $G$ , le moment  $J$  garde une valeur constante sur chaque courbe intégrale de  $\mathcal{X}_H$ . On peut donc choisir un élément  $\xi \in \mathcal{G}^*$  et chercher les courbes intégrales de  $\mathcal{X}_H$  contenues dans  $J^{-1}(\xi)$ . Lorsque  $\xi$  est une valeur régulière (ou même seulement faiblement régulière) du moment,  $J^{-1}(\xi)$  est une sous-variété de  $M$ . Les éléments de  $G$  dont l'action sur  $M$  appliquent cette sous-variété sur elle-même forment un sous-groupe fermé  $G_\xi$  de  $G$ .

## La réduction symplectique (2)

Moyennant certaines hypothèses, on peut montrer que l'ensemble  $M_\xi = J^{-1}(\xi)/G_\xi$  des orbites de l'action de  $G_\xi$  sur  $J^{-1}(\xi)$  est muni d'une forme symplectique  $\omega_\xi$ . On dit que  $(M_\xi, \omega_\xi)$  est la *variété symplectique réduite* (au sens de Marsden et Weinstein) associée à la valeur  $\xi$  du moment.

Le hamiltonien  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$  détermine, par projection, un hamiltonien  $H_\xi$  sur  $M_\xi$  et la détermination des courbes intégrales de  $\mathcal{X}_H$  contenues dans  $J^{-1}(\xi)$  peut se faire en deux étapes :

- on détermine d'abord leurs projections sur  $M_\xi$ , qui sont les courbes intégrales de  $\mathcal{X}_{H_\xi}$ ,
- puis on détermine ces courbes elle-mêmes (celle étape est parfois appelée *reconstruction*).

La construction de variétés symplectiques réduites est très importante car elle intervient dans de très nombreuses applications, dépassant largement la seule détermination de courbes intégrales de systèmes hamiltoniens au moyen d'intégrales premières.

## La réduction symplectique (3)

La construction de variétés réduites a été étendue à d'autres types de variétés, par exemple les variétés de Poisson. Voir par exemple le livre de Juan-Pablo Ortega et Tudor Ratiu, *Momentum maps and Hamiltonian reduction* (2004), où on trouvera aussi plusieurs variantes et généralisations de la notion de moment.

# Quantification (1)

On sait que l'Optique géométrique ne décrit les phénomènes lumineux qu'en première approximation. L'Optique ondulatoire d'Augustin Jean Fresnel (1788–1827) est nécessaire pour rendre compte de phénomènes tels que la diffraction.

Il en est de même pour ce qui concerne la Dynamique : la Mécanique classique ne rend compte qu'en première approximation du mouvement des corps matériels. Une autre théorie, la Mécanique quantique, est nécessaire pour aller au delà de cette approximation.

La *quantification* de la description d'un phénomène physique par un système mécanique classique (un hamiltonien défini sur une variété symplectique), est le processus qui permet d'associer, à ce système mécanique classique, une description de ce même phénomène physique dans le cadre de la Mécanique quantique.

## Quantification (2)

Les physiciens n'ont pas attendu les travaux des mathématiciens pour élaborer des procédés de quantification. Le plus employé (proposé par Paul Dirac en 1926) est la *quantification canonique*.

Estimant que la quantification canonique manquait de rigueur, les mathématiciens ont proposé pour la quantification diverses constructions, à leurs yeux plus satisfaisantes. Disons quelques mots de deux de ces constructions, la *quantification géométrique* et la *quantification par déformation*.

### 1. La quantification géométrique

Cette construction a été proposée indépendamment par Jean-Marie Souriau (1969) et Bertram Kostant (1970). Partant d'une variété symplectique  $(M, \omega)$  on construit d'abord un fibré en cercles (ou en droites complexes) de base  $M$ , muni d'une connexion dont la courbure est la forme symplectique  $\omega$ . Cette première étape, appelée *préquantification*, ne peut se faire que si la classe de cohomologie de  $\omega$  est entière.

## Quantification (3)

Souriau a montré, en préquantifiant la variété symplectique des mouvements képlériens, que la condition d'intégralité de la classe de cohomologie de  $\omega$  permet (moyennant quelques ajustements) de retrouver le spectre de l'atome d'hydrogène.

La seconde étape de la quantification géométrique consiste à choisir une *polarisation* c'est-à-dire un feuilletage lagrangien de la variété symplectique  $(M, \omega)$  et à munir d'une structure préhilbertienne l'espace des sections du fibré en cercles (ou en droites complexes) dont la dérivée covariante le long des feuilles est nulle. On peut alors construire les ingrédients habituels de la mécanique quantique (un espace de Hilbert, l'algèbre des opérateurs autoadjoints sur cet espace, ...).

Cette étape comporte encore nombre de problèmes mal résolus : existence de polarisations, non unicité lorsqu'elles existent, ...). Cependant, la quantification géométrique a reçu des applications importantes dans la théorie des représentations des groupes de Lie

## Quantification (4)

### 2. La quantification par déformation

La quantification par déformation a été proposée par Bayen, Flato, Fronsdal Lichnerowicz et Sternheimer en 1978. Une variété symplectique  $(M, \omega)$  étant donnée, cette méthode consiste à définir, sur l'espace des séries formelles en un paramètre  $\lambda$  dont les coefficients sont des fonctions différentiables sur  $M$ , une loi de composition, appelée *produit-star*, qui en fait une algèbre associative mais non commutative. On impose au produit-star de deux fonctions  $f$  et  $g$  d'être de la forme

$$f * g = fg + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k C_k(f, g),$$

où les  $C_k$  sont des opérateurs bidifférentiels, le premier coefficient  $C_1$  étant le crochet de Poisson

$$C_1(f, g) = \{f, g\}.$$

## Quantification (4)

Lors de l'interprétation physique de ces formules on donne au paramètre  $\lambda$  la valeur  $i\hbar$ , où  $\hbar$  est la constante de Planck.

L'associativité du produit-star impose de sévères contraintes aux opérateurs différentiels  $C_k$ . C'est pourquoi la construction d'un produit-star se heurte à de très fortes obstructions cohomologiques. Cependant, Marc deWilde et Pierre Lecomte en 1983, Fedosov en 1985 ont prouvé l'existence d'un produit-star sur toute variété symplectique.

Remplaçant la variété symplectique  $(M, \omega)$  par une variété de Poisson, Maxim Kontsévitich a prouvé en 1997 que la donnée d'un crochet de Poisson sur une variété  $M$  déterminait un unique produit-star dont ce crochet de Poisson est le terme de degré 1. La construction de Kontsévitich a eu d'importantes conséquences dans plusieurs branches des mathématiques.



# Groupes de Lie-Poisson (1)

On montre aisément que le produit de deux variétés de Poisson est naturellement muni d'une structure de Poisson, dite *produit*, déterminée par celles des deux facteurs.

Un *groupe de Lie-Poisson* est un groupe de Lie  $G$  muni d'une structure de Poisson telle que le produit  $m : G \times G \rightarrow G$  soit une application de Poisson ( $G \times G$  étant muni de la structure de Poisson produit).

Les groupes de Lie-Poisson ont été introduits par V.G. Drinfeld en 1986, comme des analogues semi-classiques des *groupes quantiques*. Ils possèdent de remarquables propriétés.

- le dual  $\mathcal{G}^*$  de l'algèbre de Lie  $\mathcal{G}$  d'un groupe de Lie-Poisson  $G$  possède une structure naturelle d'algèbre de Lie, déterminée par le crochet de Poisson sur  $G$ .
- Tout groupe de Lie connexe et simplement connexe ayant  $\mathcal{G}^*$  pour algèbre de Lie est lui aussi un groupe de Lie-Poisson ; le groupe de Lie  $G^*$  connexe et simplement connexe ayant  $\mathcal{G}^*$  pour algèbre de Lie est le *groupe de Lie-Poisson dual* de  $G$ .

## Groupes de Lie-Poisson (2)

- Le dual  $(G^*)^*$  du dual du groupe de Lie-Poisson  $G$  est le groupe de Lie connexe et simplement connexe ayant la même algèbre de Lie que  $G$  ; si  $G$  lui-même est connexe et simplement connexe, il est le dual de son dual  $G^*$ , de sorte que  $G$  et son dual jouent des rôles parfaitement symétriques.
- Par exemple, un groupe de Lie  $G$  muni de la structure de Poisson nulle est un groupe de Lie-Poisson, dont le groupe dual est le dual  $\mathcal{G}^*$  de son algèbre de Lie, considéré comme groupe de Lie abélien (la loi de composition étant l'addition dans l'espace vectoriel  $\mathcal{G}^*$ ).
- On peut définir la notion d'action de Poisson d'un groupe de Lie-Poisson  $G$  sur une variété de Poisson  $P$ , et de *moment* d'une telle action (thèse de Jiang-Hua Lu , 1990). Ce moment  $J : P \rightarrow G^*$  prend ses valeurs dans le groupe de Lie-Poisson  $G^*$  dual de  $G$ , et généralise le moment de l'action hamiltonienne d'un groupe de Lie sur une variété symplectique.

# Groupoïdes symplectiques et grupoïdes de Poisson (1)

La notion de *grupoïde*, qui généralise celle de groupe, a été introduite en algèbre par W. Brandt en 1926. Charles Ehresmann (1905–1979) a utilisé en Topologie et en Géométrie différentielle des grupoïdes munis d'une structure additionnelle, topologique (les grupoïdes topologiques) ou différentiable (les grupoïdes de Lie, qui généralisent les groupes de Lie).

De même qu'à chaque groupe de Lie on peut associer une algèbre de Lie, à chaque grupoïde de Lie on peut associer un *algébroïde de Lie*. La notion d'algébroïde de Lie a été introduite par Jean Pradines en 1968.

La recherche de réalisations symplectiques de variétés de Poisson en vue de leur quantification a conduit Alan Weinstein à introduire, vers 1985, la notion de *grupoïde symplectique*.

## Groupoïdes symplectiques et grupoïdes de Poisson (2)

Contrairement au fibré tangent à un groupe de Lie  $G$ , qui possède une structure naturelle de groupe de Lie, le fibré cotangent  $T^*G$  n'est pas un groupe de Lie, mais un *grupoïde de Lie*. L'ensemble des unités de ce grupoïde est l'espace cotangent à l'élément neutre, qui s'identifie au dual  $\mathcal{G}^*$  de l'algèbre de Lie du groupe. Les applications source et but qui, pour chaque  $g \in G$ , appliquent la fibre  $T_g^*G$  sur l'ensemble des unités  $T_e^*G \equiv \mathcal{G}^*$ , sont les prolongements aux covecteurs des translations à droite  $R_{g^{-1}} : G \rightarrow G$  et à gauche  $L_{g^{-1}} : G \rightarrow G$ ; ce sont aussi les moments des actions hamiltoniennes de  $G$  sur  $T^*G$  qui prolongent les actions de  $G$  sur lui-même par translations à gauche et à droite, respectivement.

Les *grupoïdes de Poisson*, introduits par Ping Xu en 1995, généralisent à la fois les grupoïdes symplectiques et les groupes de Lie-Poisson, qui en sont des cas particuliers.

# Structures de Dirac (1)

On appelle *fibré de Pontryagin* sur une variété  $M$  la somme directe  $TM \oplus T^*M$  des fibrés tangent et cotangent. Une section du fibré de Pontryagin est un couple  $(X, \eta)$  formé par un champ de vecteurs  $X$  et une 1-forme différentielle  $\eta$ . Il existe sur l'espace des sections du fibré de Pontryagin une forme bilinéaire symétrique non dégénérée, de signature  $(n, n)$ , (en notant  $n = \dim M$ )

$$\langle (X_1, \eta_1), (X_2, \eta_2) \rangle = \langle \eta_1, X_2 \rangle + \langle \eta_2, X_1 \rangle .$$

Ted Courant a défini en 1990 une loi de composition bilinéaire antisymétrique sur l'espace des sections du fibré de Pontryagin, appelée *crochet de Courant*. Irène Dorfman avait déjà défini en 1987 sur cet espace un *crochet de Dorfman* bilinéaire, non antisymétrique, dont le crochet de Courant est la partie antisymétrique.

## Structures de Dirac (2)

On appelle *structure de Dirac* sur  $M$  un sous-fibré vectoriel du fibré de Pontryagin  $TM \oplus T^*M$ , isotrope pour le couplage bilinéaire symétrique ci-dessus défini, de rang  $n$  (maximal).

Une structure de Dirac  $D$  sur la variété  $M$  est dite *intégrable* si le crochet de Courant de deux sections de  $D$  est encore une section de  $D$ . On montre alors que  $D$  est un algébroïde de Lie de base  $M$ . Les structures de Dirac intégrables contiennent comme cas particuliers les structures symplectiques, les structures présymplectiques et les structures de Poisson.

On peut généraliser ces définitions en remplaçant  $TM \oplus T^*M$  par un fibré de Pontryagin d'ordre supérieur  $TM \oplus (\wedge^p(T^*M))$ , avec  $0 \leq p \leq \dim M$ .

Une autre généralisation s'obtient par complexification : une *structure complexe généralisée* est un sous-fibré isotrope maximal de  $(TM \oplus T^*M) \otimes \mathbb{C}$  stable par crochet de Courant, et tel que  $(TM \oplus T^*M) \otimes \mathbb{C}$  soit somme directe de ce sous-fibré et de son conjugué.

# Topologie symplectique (1)

La *topologie symplectique* est un domaine de recherches très actives, où on utilise des méthodes de géométrie symplectique, ou de géométrie de contact, pour établir des résultats de nature topologique, définir des invariants, . . . On considère comme article fondateur de ce domaine le travail de Mickael Gromov *Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds* (1985). Citons brièvement quelque résultats très remarquables obtenus par Gromov.

- Dans  $\mathbb{R}^{2n}$  muni de sa forme symplectique naturelle, une boule de rayon  $R_1$  ne peut être plongée, par un plongement symplectique, dans un cylindre de rayon  $R_2$  (le produit d'un disque symplectique de rayon  $R_2$  et de  $\mathbb{R}^{2n-2}$  muni de sa structure symplectique canonique) que si et seulement si  $R_1 \leq R_2$ .

## Topologie symplectique (2)

- Séparons  $\mathbb{R}^{2n}$  en deux parties par l'hyperplan d'équation  $x_1 = 0$ , percé d'un trou de rayon  $R_2$ . On ne peut faire passer par ce trou une boule de rayon  $R_1$  d'un côté à l'autre de cet hyperplan, par une famille de plongements symplectiques, que si et seulement si  $R_1 \leq R_2$ .
- Soit  $(M, \omega)$  une variété symplectique de dimension 4, qui en dehors d'une partie compacte est symplectomorphe au complémentaire d'une boule de  $\mathbb{R}^4$ . Ce symplectomorphisme se prolonge en un symplectomorphisme de  $M$  toute entière sur  $\mathbb{R}^4$ . Ce résultat permet de montrer l'unicité de la structure symplectique de  $\mathbb{C}\mathbb{P}(2)$ .
- Cependant, pour  $n > 1$ , il existe au moins une structure symplectique exotique (non symplectomorphe à la structure canonique) sur  $\mathbb{R}^{2n}$ .



## Topologie symplectique (3)

Une *capacité symplectique* est une fonction  $c$  définie sur l'ensemble des parties de  $\mathbb{R}^{2n}$  (ou plus généralement d'une variété symplectique), à valeurs dans  $[0, +\infty]$ , qui mesure la "taille" de cette partie. Cette fonction doit vérifier

- si  $U \subset V$ ,  $c(U) \leq c(V)$ ;
- soient  $(U_1, \omega_1)$  et  $(U_2, \omega_2)$  deux parties de  $\mathbb{R}^{2n}$  munies des formes symplectiques  $\omega_1$  et  $\omega_2$  et  $\Phi : U_1 \rightarrow U_2$  un difféomorphisme conformément symplectique (tel que  $\Phi^*\omega_2 = k\omega_1$ ),  $k$  constante  $> 0$ ; alors  $kc(U_1, \omega_1) = c(U_2, \omega_2)$ ;
- la capacité symplectique d'une boule est strictement positive, et celle d'un cylindre est finie.  $U \subset V$  implique  $c(U) \leq c(V)$ ;

Outre la capacité symplectique utilisée par Gromov (basée sur le plongement de boules), d'autres capacités symplectiques ont été découvertes notamment par Ekeland et Hofer, Hofer et Zehnder. Elles jouent un rôle essentiel dans les recherches actuelles en topologie symplectique.

# Remerciements

Je remercie Dominique Flament de m'avoir invité à présenter cet exposé au Séminaire *Histoires de Géométries* dont je suis depuis plusieurs années un auditeur intéressé, beaucoup plus souvent qu'un conférencier, et

Merci à toutes les personnes qui ont eu la patience de m'écouter !

# Bibliographie I

## I. Partie historique

- [1] A. L. Cauchy, *Note sur la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, tome II, p. 406–412, 1837. Extrait d'un Mémoire sur la Mécanique céleste présenté à l'Académie de Turin le 11 octobre 1831.
- [2] W. R. Hamilton, *Theory of systems of rays, Part First and Part Second (1827). Supplement to an essay on the theory of systems of rays (1830). Second supplement to an essay on the theory of systems of rays (1830). Third supplement to an essay on the theory of systems of rays (1830)*. In Sir William Rowan Hamilton mathematical Works, vol. I, chapters 1 to IV, Cambridge University Press.

## Bibliographie II

- [3] W. R. Hamilton, *On a general method in Dynamics*. Read April 10, 1834, Philosophical Transactions of the Royal Society, part II for 1834, pp. 247–308. In Sir William Rowan Hamilton mathematical Works, vol. IV, Cambridge University Press.
- [4] W. R. Hamilton, *Second essay on a general method in Dynamics*. Read January 15, 1835, Philosophical Transactions of the Royal Society, part I for 1835, pp. 95–144. In Sir William Rowan Hamilton mathematical Works, vol. IV, Cambridge University Press.
- [5] J.-L. Lagrange, *Recherches sur les équations séculaires des mouvements des nœuds et des inclinaisons des orbites des planètes*. Mémoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris, année 1774. Dans *Œuvres de Lagrange*, volume VI, Gauthier-Villars, Paris, 1877, pages 636–709.

# Bibliographie III

- [6] J.-L. Lagrange, *Théorie des variations séculaires des éléments des planètes, Première et Seconde parties*. Nouveaux mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, années 1781 et 1782. Dans *Œuvres de Lagrange*, volume V, Gauthier-Villars, Paris, 1870, pages 125–207 et 211–344.
- [7] J.-L. Lagrange, *Sur les variations séculaires des mouvements moyens des planètes*. Nouveaux mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, année 1783. Dans *Œuvres de Lagrange*, volume V, Gauthier-Villars, Paris, 1870, pages 381–414.

## Bibliographie IV

- [8] J.-L. Lagrange, *Théorie des variations périodiques des mouvements des planètes, Première et Seconde parties*. Nouveaux mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, années 1783 et 1784. Dans *Œuvres de Lagrange*, volume V, Gauthier-Villars, Paris, 1870, pages 347–377. et 417–489.
- [9] J.-L. Lagrange, *Mémoire sur la théorie des variations des éléments des planètes et en particulier des variations des grands axes de leurs orbites*. Lu le 22 août 1808 à l'Institut de France. Dans *Œuvres de Lagrange*, volume VI, Gauthier-Villars, Paris, 1877, pages 713–768.

# Bibliographie V

- [10] J.-L. Lagrange, *Mémoire sur la théorie générale de la variation des constantes arbitraires dans tous les problèmes de mécanique*. Lu le 13 mars 1809 à l'Institut de France. Dans *Œuvres de Lagrange*, volume VI, Gauthier-Villars, Paris, 1877, pages 771–805.
- [11] J.-L. Lagrange, *Second mémoire sur la théorie de la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique*. Mémoire lu le 19 février 1810 à l'Institut de France. Dans *Œuvres de Lagrange*, volume VI, Gauthier-Villars, Paris, 1877, pages 809–816.

## Bibliographie VI

- [12] J.-L. Lagrange, *Mécanique analytique*. Première édition chez la veuve Desaint, Paris 1808. Réimprimé par Jacques Gabay, Paris, 1989. Deuxième édition par Mme veuve Courcier, Paris, 1811. Réimprimé par Albert Blanchard, Paris. Quatrième édition (la plus complète) en deux volumes, avec des notes par M. Poincaré, M. Lejeune-Dirichlet, J. Bertrand, G. Darboux, M. Puiseux, J. A. Serret, O. Bonnet, A. Bravais, dans *Œuvres de Lagrange*, volumes XI et XII, Gauthier-Villars, Paris, 1888.
- [13] P. S. Laplace, *Sur le principe de la gravitation universelle et sur les inégalités séculaires des planètes qui en dépendent*, Mémoire de l'Académie royale des sciences de Paris, année 1773, t. VII. Dans *Œuvres complètes de Laplace*, tome huitième, Gauthier-Villars et fils, Paris, 1891, pages 201–275.



## Bibliographie VII

- [14] P. S. Laplace, *Mémoire sur les solutions particulières des équations différentielles et sur les inégalités séculaires des planètes*, Mémoire de l'Académie royale des sciences de Paris, année 1772, 1ère partie, 1775. Dans *Œuvres complètes de Laplace*, tome huitième, Gauthier-Villars et fils, Paris, 1891, pages 325–366.
- [15] S. D. Poisson, *Mémoire sur les inégalités séculaires des moyens mouvements des planètes*. Lu le 20 juin 1808 à l'Institut de France. Journal de l'école Polytechnique, quinzième cahier, tome VIII, pages 1–56.
- [16] S. D. Poisson, *Sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de mécanique*. Mémoire lu le 16 octobre 1809 à l'Institut de France. Journal de l'école Polytechnique, quinzième cahier, tome VIII, pages 266–344.

# Bibliographie VIII

## II. Livres (relativement) récents

- [1] R. Abraham and J.E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, second edition, Addison-Wesley, 1978.
- [2] Vladimir I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Second edition, Springer, 1978, 1989.
- [3] Vladimir I. Arnold and Boris A. Khesin, *Topological Methods in Hydrodynamics*, Springer, 1998.
- [4] Ana Cannas da Silva and Alan Weinstein, *Geometric models for Noncommutative Algebras*. Berkeley lecture notes number 10, American Mathematical Society, 1999.
- [5] Victor Guillemin and Shlomo Sternberg, *Symplectic techniques in Physics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

# Bibliographie IX

- [6] Camille Laurent-Gengoux, Anne Pichereau and Pol Vanhaecke, *Poisson structures*. Springer, 2013.
- [7] Paulette Libermann and Charles-Michel Marle, *Symplectic geometry and analytical mechanics*, Reidel, Dordrecht 1987.
- [8] Juan-Pablo Ortega and Tudor S. Ratiu, *Momentum maps and Hamiltonian reduction*. Birkhäuser, 2004.
- [9] J.-M. Souriau, *Structure des systèmes dynamiques*, Dunod, Paris, 1969.
- [10] Włodzimierz M. Tulczyjev, *Geometric Formulations of Physical Theories*, Monographs and Textbooks in Physical Science, Bibliopolis, Napoli, 1989.
- [11] H. Weyl, *The classical groups*, Princeton University Press, Princeton, 1939.

# Bibliographie X

## III. Articles (relativement) récents

- [1] Vladimir Arnold, Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, v. 16 (1966), p. 319–361.
- [2] Theodore Courant, Dirac manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.* 319 (1990), p. 631–661.
- [3] I. Ekeland and H. Hofer, Symplectic topology and Hamiltonian dynamics, *Math. Zeitschrift* 200 (1989), p. 355–378.
- [4] Mickael Gromov, Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds, *Invent. math.* 82 (1985), p. 307–347.
- [5] André Lichnerowicz, Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées. *Journal of Differential Geometry* 12 (1977), p. 253–300.

# Bibliographie XI

- [6] André Lichnerowicz, Les variétés de Jacobi et leurs algèbres de Lie associées. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 57 (1979), p. 453–488.
- [7] Jerrold E. Marsden and Alan Weinstein, Reduction of symplectic manifolds with symmetry, *Reports on Mathematical Physics* 5, 1974, p. 121–130.
- [8] Dusa McDuff, Symplectic topology and capacities. In *Prospects in mathematics* (Rossi, ed.), AMS, 1999.
- [9] Kenneth Meyer, Symmetries and integrals in mechanics. In *Dynamical systems* (M. Peixoto, ed.), Academic Press (1973) p. 259–273.
- [10] Stephen Smale, Topology and mechanics, parts I and II. *Invent. Math.* (1970), 10, p. 305–331 and 11, p. 45–64.

## Bibliographie XII

- [11] Jerzy Sniatycki and Włodzimierz Tulczyjew, Generating forms of Lagrangian submanifolds. *Indiana University Math. J.* 22 (1972), p. 267–275.
- [12] Alan Weinstein, The local structure of Poisson manifolds, *J. Differential Geometry* 18 (1983), p. 523–557.
- [13] Alan Weinstein, Symplectic groupoids and Poisson manifolds, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 16 (1987), p. 101–103.
- [14] Ping Xu, On Poisson groupoids, *Internat. J. Math.*, 6-1 (1995), 101–124.