
WILLIAM ROWAN HAMILTON ET LE THÉORÈME DE MALUS-DUPIN

Charles-Michel Marle

*Ce modeste travail est dédié à la mémoire
des anciens élèves de l'École Polytechnique
Étienne Louis Malus (X 1794) et Pierre Charles François Dupin (X 1801),
dans l'espoir que dans l'avenir cette école formera,
comme elle le fit brillamment autrefois,
des scientifiques et des ingénieurs de haut niveau
plutôt que des gestionnaires, des assureurs, des banquiers et des « traders ».*

Résumé. — Nous présentons, parallèlement à la preuve due à William Rowan Hamilton, une preuve du théorème de Malus-Dupin de l'optique géométrique basée sur la structure symplectique de l'ensemble des droites orientées d'un espace affine euclidien.

Abstract. — We present, in parallel with the proof due to to William Rowan Hamilton, a proof of Malus-Dupin's theorem in Geometrical Optics founded on the symplectic structure of the set of all oriented straight lines in an Euclidean affine space.

1. Introduction

Les travaux sur la variation lente des éléments orbitaux des planètes, effectués de 1808 à 1810 par Joseph Louis Lagrange (1736–1813) et Siméon Denis Poisson (1781–1840), sont une des principales sources de la

Classification mathématique par sujets (2000). — 53D05, 53D12, 53B50, 7803.

Mots clefs. — Optique géométrique, théorème de Malus-Dupin, structures symplectiques, sous-variétés lagrangiennes.

géométrie symplectique. Une autre source, aussi importante mais peut-être moins connue, se trouve dans les travaux sur l'Optique de Pierre de Fermat (1601–1665), Christian Huygens (1629–1695), Étienne-Louis Malus (1775–1812), Charles François Dupin (1784–1873) et William Rowan Hamilton (1805–1865). Je parlerai surtout, dans ce qui suit, du théorème de Malus-Dupin de l'Optique géométrique. Selon ce théorème, une famille de rayons lumineux dépendant différentiablement de deux paramètres qui, à l'entrée dans un système optique, possède une propriété (définie plus loin) appelée *rectangularité*, possède encore cette propriété à sa sortie du système. Le système optique considéré peut comporter un nombre quelconque de milieux transparents homogènes et isotropes d'indices de réfraction différents séparés par des surfaces réfractantes ainsi que des surfaces réfléchissantes, ces surfaces étant différentiables, mais pouvant être de formes quelconques.

En Optique géométrique, un *rayons lumineux* dans un milieu homogène et isotrope est assimilé à un segment de droite orientée de l'espace physique \mathcal{E} , assimilé lui-même, une fois choisie une unité de longueur, à un espace affine euclidien de dimension 3. L'ensemble de toutes les droites orientées de \mathcal{E} sera noté \mathcal{L} . Nous verrons plus loin que \mathcal{L} possède une structure de variété symplectique de dimension 4. Les réflexions sur un miroir (assimilé à une surface lisse, c'est-à-dire différentiable de classe C^∞) ou les réfractions à travers une surface lisse séparant deux milieux d'indices de réfraction différents, peuvent être considérés comme des transformations de \mathcal{L} , c'est-à-dire des applications d'un ouvert de \mathcal{L} sur un autre ouvert de cette variété, associant à la droite orientée qui porte le rayon incident la droite orientée qui porte le rayon réfléchi ou réfracté correspondant.

1.1. Définition. — Une *famille de rayons dépendant différentiablement de n paramètres* ($1 \leq n \leq 4$) est une sous-variété immergée (pas nécessairement plongée) \mathcal{F} de dimension n de \mathcal{L} . Pour alléger nous dirons *famille de rayons à n paramètres*, la différentiabilité étant sous-entendue.

1.2. Définition. — Un *point régulier* d'un rayon R_0 d'une famille \mathcal{F} de rayons à 2 paramètres est un point m_0 de R_0 ayant la propriété suivante : pour toute surface différentiable S de l'espace \mathcal{E} passant par m_0 et transverse en ce point au rayon R_0 , il existe un voisinage ouvert U de R_0 dans \mathcal{F} et un voisinage ouvert V de m_0 dans S , tels que chaque rayon

$R \in U$ rencontre V en un point unique m et que l'application $R \mapsto m$ soit un difféomorphisme de U sur V .

1.3. Définition. — Une famille de rayons à 2 paramètres est dite *rectangulaire* lorsque chaque point régulier d'un rayon de cette famille appartient à un petit morceau de surface différentiable traversé orthogonalement par ce rayon et par tous les rayons d'un voisinage, dans cette famille, du rayon considéré.

Je peux donner maintenant un énoncé formel précis du théorème de Malus-Dupin.

1.4. Théorème (de Malus-Dupin). — *Une famille rectangulaire de rayons lumineux qui entre dans un système optique comportant un nombre quelconque de surfaces lisses réfléchissantes ou réfractantes, reste rectangulaire tout au long de sa propagation, dans chacun des milieux transparents homogènes et isotropes qu'elle traverse.*

1.5. Commentaires. — La régularité d'un point sur un rayon d'une famille \mathcal{F} à 2 paramètres, et la rectangularité de cette famille, sont des propriétés locales. Il est facile de voir que si un point m_0 d'un rayon $R_0 \in \mathcal{F}$ est régulier, il existe un voisinage ouvert U de R_0 dans \mathcal{F} et un voisinage ouvert W de m_0 dans \mathcal{E} (non plus dans S !) tels que chaque rayon élément de U rencontre W , que chaque point de W soit situé sur un rayon élément de U unique et soit régulier sur ce rayon. À chaque point $m \in W$, associons le plan orthogonal au rayon $R \in U$ qui passe par m . Nous définissons ainsi une *distribution* de rang 2 sur l'ouvert W . La *rectangularité* de la famille \mathcal{F} au voisinage du rayon R_0 équivaut à la *complète intégrabilité* de cette distribution ([14] définition 5.2 p. 130), c'est-à-dire à l'existence d'une décomposition (appelée *feuilletage*) de W en surfaces immergées tangentes, en chacun de leurs points, au plan orthogonal au rayon élément de U passant par ce point.

Les familles de rayons à 2 paramètres rencontrées en pratique sont souvent telles qu'il existe une partie de l'espace physique \mathcal{E} dans laquelle plusieurs nappes de la famille de rayons considérée se superposent. Les points non réguliers d'une famille de rayons à 2 paramètres forment les *surfaces caustiques* de la famille. Elles ont été étudiées par Hamilton dès 1824, alors qu'il n'avait que 19 ans [5]⁽¹⁾.

1. L'existence de points réguliers sur chaque rayon d'une telle famille est implicitement admise par Hamilton. Je ne donnerai pas la preuve de ce fait et n'aborderai

1.6. Exemples. — Dans un milieu transparent homogène et isotrope, la famille de rayons issus d'un point lumineux est rectangulaire, car les sphères centrées sur le point lumineux sont orthogonales à tous les rayons. Il en est de même de la famille de rayons émis par une surface lumineuse différentiable dont chaque point émet un seul rayon dans la direction orthogonale à la surface lumineuse.

Soient D_1 et D_2 deux droites orthogonales de l'espace \mathcal{E} ne se rencontrant pas, et \mathcal{F} l'ensemble de toutes les droites qui rencontrent à la fois D_1 et D_2 orientées dans le sens allant de D_1 vers D_2 . Un calcul facile utilisant le théorème de Frobenius ([14] théorème 5.2 p. 134) montre que \mathcal{F} n'est pas rectangulaire.

Après une brève présentation du contexte historique, je présenterai les grandes lignes de la preuve du théorème de Malus-Dupin due à Hamilton, puis je donnerai une autre preuve de ce théorème basée sur la géométrie symplectique.

2. Contexte historique

Étienne Louis Malus de Mitry (1775–1812) est un militaire, mathématicien et physicien français qui a étudié les propriétés géométriques des familles de droites orientées de l'espace, en vue d'applications aux rayons lumineux. Il perfectionna la théorie ondulatoire de la lumière de Christian Huygens (1629–1695), découvrit et étudia les phénomènes de *polarisation* de la lumière et de *biréfringence*. Il participa à la désastreuse campagne de Napoléon en Égypte (1798–1801). Il y contracta une terrible maladie, la peste, et en guérit miraculeusement. Il devint directeur des études à l'École Polytechnique en 1811. Affaibli par les maladies contractées en Égypte, il succomba à la tuberculose en 1812. Son journal, écrit durant la campagne d'Égypte, publié en 1892 [12], peut être téléchargé sur Gallica, le site internet de la Bibliothèque Nationale.

Malus prouva [10] que la famille de rayons émise par une source lumineuse ponctuelle (qui est rectangulaire) reste rectangulaire après réflexion sur *un* miroir lisse ou réfraction à travers *une* surface lisse séparant deux

pas l'étude des caustiques. Les lecteurs intéressés par ces questions délicates relevant de la théorie des singularités pourront consulter [1], chapitre 9, paragraphe 46, pages 248–258 et appendice 11, pages 438–439. Ils trouveront dans cet ouvrage et dans [4] (Introduction, pp. 1–150) des applications de la géométrie symplectique à l'optique géométrique bien plus élaborées que celles présentées ici.

milieux transparents d'indices de réfraction différents. Mais il doutait que cette propriété soit encore vraie pour *plusieurs* réflexions ou réfractions successives [11]⁽²⁾. Ses travaux sur les familles de droites orientées ont été plus tard utilisés et considérablement améliorés par Hamilton [5, 6].

Charles François Dupin (1784–1873) est un ingénieur du génie maritime et mathématicien français. Son nom est attaché à plusieurs objets mathématiques : les *cyclides de Dupin*, de remarquables surfaces qu'il découvrit alors qu'il était encore élève de Gaspard Monge (1746–1818) à l'École Polytechnique, l'*indicatrice de Dupin* qui renseigne sur la forme d'une surface au voisinage d'un point⁽³⁾. Il passa plusieurs années à Corfou pour y rénover l'arsenal, tout en participant à la fondation puis aux travaux de l'Académie ionienne. Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, il consacra beaucoup d'efforts à l'éducation populaire. C'était un homme aux idées très avancées, même pour notre époque : il souhaitait qu'une bonne instruction soit donnée aux filles comme aux garçons et croyait aux effets bénéfiques, pour la société, d'une élévation générale du niveau d'éducation. Il donna une preuve géométrique très simple du théorème de Malus-Dupin pour les réflexions [3] et savait que ce théorème est vrai aussi pour les réfractions, mais n'a pas publié de preuve de ce résultat.

D'après [2], Adolphe Quetelet (1796–1874) et Joseph Diaz Gergonne (1771–1859) ont donné en 1825 une preuve du théorème de Malus-Dupin à la fois pour les réflexions et les réfractions. Indépendamment, le grand mathématicien irlandais William Rowan Hamilton (1805–1865) a lui aussi donné, un peu plus tard, une preuve complète de ce théorème [6]. Il cite Malus mais pas Dupin, ni Quetelet, ni Gergonne, ce qui explique peut-être pourquoi le théorème de Malus-Dupin, ainsi nommé dans les cours français d'optique, est plus souvent appelé *théorème de Malus* à l'étranger.

2. Voici une belle illustration du fameux théorème d'Arnold : *lorsqu'un théorème ou un objet mathématique porte le nom d'une personne, cette personne n'est pas celle qui a prouvé ce théorème ou créé cet objet*. Arnold ajoutait avec humour : *bien sûr, mon théorème s'applique à lui-même !*

3. Je ne pense pas que le théorème d'Arnold mentionné dans la note de bas de page précédente s'applique à ces objets, qui sont bien à lui.

3. La démonstration de Hamilton

Je vais dans ce paragraphe présenter la preuve du théorème de Malus-Dupin donnée par Hamilton ([6]), d'abord pour une réflexion, puis pour une réfraction. Tout en respectant scrupuleusement les idées de Hamilton, j'utiliserai pour expliquer les deux variantes de cette preuve les notations vectorielles aujourd'hui familières aux mathématiciens et aux physiciens. De plus, j'illustrerai ses raisonnements par des figures, alors que les mémoires publiés par Hamilton n'en comportent aucune⁽⁴⁾.

3.1. Cas d'une réflexion. — Considérons un rayon lumineux L_1 qui rencontre transversalement un miroir différentiable M du côté réfléchissant en un point P , et soit L_2 le rayon réfléchi correspondant. Notons \vec{u}_1 et \vec{u}_2 les vecteurs unitaires directeurs de L_1 et de L_2 , et \vec{n} le vecteur unitaire normal au miroir M au point d'incidence P . Soit M_1 un point de L_1 , M_2 un point de L_2 et O un point fixé quelconque de \mathcal{E} (figure 1). Nous supposons que lorsque le rayon L_1 est affecté par une variation infinitésimale (qui entraîne bien sûr des variations infinitésimales parfaitement déterminées du point d'incidence P et du rayon réfléchi L_2) les points M_1 et M_2 sont eux aussi affectés par des variations infinitésimales (qui ne sont pas déterminées de manière unique) telles qu'ils restent toujours, respectivement, sur L_1 et sur L_2 . Pour alléger l'écriture nous noterons $\overrightarrow{M_1P}$, $\overrightarrow{M_2P}$ et \overrightarrow{OP} les vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ et \overrightarrow{OP} . Les lois de la réflexion montrent que les vecteurs $\vec{u}_2 - \vec{u}_1$ et \vec{n} sont colinéaires tandis que pour toute variation infinitésimale de L_1 , la variation infinitésimale $d\overrightarrow{OP}$ du point d'incidence est tangente au miroir M , donc orthogonale à \vec{n} . Par suite

$$(\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \cdot d\overrightarrow{OP} = 0, \quad (*)$$

où le point \cdot désigne le produit scalaire. Posons

$$\overline{M_1P} = \vec{u}_1 \cdot \overrightarrow{M_1P}, \quad \overline{PM_2} = \vec{u}_2 \cdot \overrightarrow{PM_2}.$$

4. Les éditeurs des Œuvres mathématiques de Hamilton attribuent l'absence de figure à l'influence de Lagrange, qui déclare fièrement dans la préface de son célèbre traité [7] : « On ne trouvera point de figure dans cet Ouvrage. Les méthodes que j'y expose ne demandent ni constructions, ni raisonnements géométriques ou mécaniques, mais seulement des opérations algébriques, assujetties à une marche régulière et uniforme. Ceux qui aiment l'Analyse, verront avec plaisir la Mécanique en devenir une nouvelle branche, et me sauront gré d'en avoir étendu ainsi le domaine ».

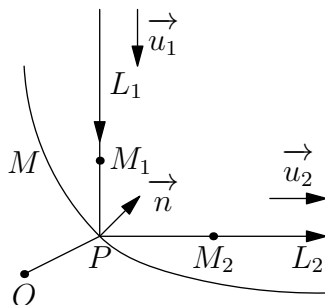


FIGURE 1. Une réflexion

Un calcul facile montre que pour toute variation infinitésimale du rayon incident L_1

$$\vec{u}_2 \cdot d\vec{M}_2 - \vec{u}_1 \cdot d\vec{M}_1 = d(\overline{M_1P} + \overline{PM_2}). \quad (**)$$

Hamilton considère une famille à 2 paramètres rectangulaire \mathcal{F} de rayons dont chaque élément rencontre le miroir M transversalement. Puisque \mathcal{F} est rectangulaire, Hamilton peut sur chaque rayon $L_1 \in \mathcal{F}$ choisir le point M_1 sur une petite surface traversée orthogonalement par les rayons éléments de \mathcal{F} qui la rencontrent. Par suite $\vec{u}_1 \cdot d\vec{M}_1 = 0$. Il choisit, sur chaque rayon réfléchi L_2 , le point M_2 de manière telle que $\overline{M_1P} + \overline{PM_2}$ ait, pour tous les rayons, une même valeur. L'égalité (**)
ci-dessus montre alors que $\vec{u}_2 \cdot d\vec{M}_2 = 0$. Au voisinage de chaque rayon réfléchi L_2 sur lequel le point M_2 est régulier, les variations infinitésimales de M_2 engendrent une petite surface traversée orthogonalement par tous les rayons réfléchis qui la rencontrent. La famille des rayons réfléchis est donc rectangulaire.

3.2. Cas d'une réfraction. — Considérons un rayon lumineux L_1 qui rencontre transversalement en un point P une surface différentiable R séparant le milieu transparent contenant ce rayon, d'indice de réfraction n_1 , d'un autre milieu transparent d'indice de réfraction n_2 , sous un angle d'incidence tel qu'il existe un rayon réfracté L_2 transverse à R (figure 2). Les notations étant les mêmes que celles de 3.1, les lois de la réfraction de Snell-Descartes montrent que les égalités (*) et (**) du paragraphe 3.1 doivent être remplacées par

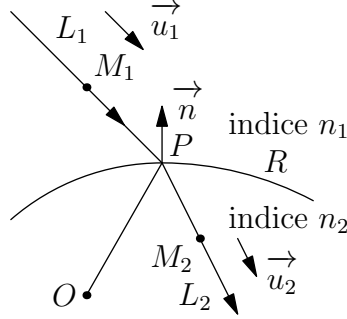


FIGURE 2. Une réfraction

$$(n_1 \vec{u}_1 - n_2 \vec{u}_2) \cdot d\vec{P} = 0,$$

$$n_2 \vec{u}_2 \cdot d\vec{M}_2 - n_1 \vec{u}_1 \cdot d\vec{M}_1 = d(n_1 \overline{M_1 P} + n_2 \overline{P M_2}).$$

En utilisant la seconde égalité Hamilton montre, exactement comme dans le cas d'une réflexion, que si les rayons incidents forment une famille à 2 paramètres rectangulaire, la famille des rayons réfractés est elle aussi rectangulaire.

4. Une démonstration symplectique

Après un bref rappel concernant la forme de Liouville d'un fibré cotangent (4.1), je vais dans ce paragraphe montrer que l'ensemble \mathcal{L} des droites orientées de l'espace affine euclidien \mathcal{E} possède une structure symplectique naturelle (4.2) et que les familles rectangulaires en sont les sous-variétés immergées lagrangiennes (4.4). Puis je montrerai que les réflexions et les réfractions sont des transformations symplectiques (4.5 et 4.6).

4.1. Rappels sur la forme de Liouville. — Sur le fibré cotangent T^*M à une variété différentiable M de dimension n , il existe ([9] p. 59, [8] p. 176) une 1-forme différentielle λ_Σ appelée *forme de Liouville*. Rappelons son expression : pour tout $\eta \in T^*M$, $\lambda_M(\eta)$ est la forme linéaire sur l'espace $T_\eta(T^*M)$

$$\lambda_M(\eta)(w) = \eta(T\pi_M(w)), \quad w \in T_\eta(T^*M),$$

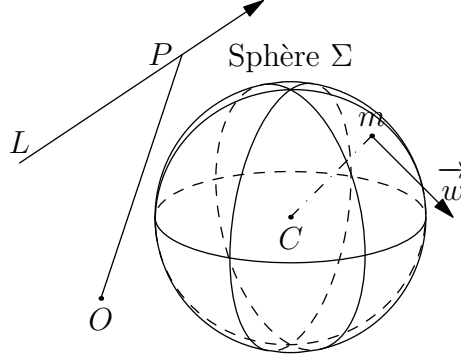


FIGURE 3. Espace des droites orientées et fibré cotangent à une sphère

où $\pi_M : T^*M \rightarrow M$ est la projection canonique du fibré cotangent sur sa base et $T\pi_M : T(T^*M) \rightarrow TM$ sa différentielle. Si (x_1, \dots, x_n) est le système de coordonnées locales dans une carte de M et $(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n)$ le système de coordonnées locales dans la carte associée de T^*M , la forme de Liouville λ_M a pour expression locale

$$\lambda_M = \sum_{i=1}^n p_i dx_i.$$

La différentielle extérieure $d\lambda_M$ de la forme de Liouville est une forme symplectique, dite *forme symplectique canonique* du fibré cotangent T^*M . Son expression locale dans le système de coordonnées locales $(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n)$ utilisé ci-dessus est

$$d\lambda_M = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dx_i.$$

4.2. Proposition. — *Le choix d'un point O de l'espace affine euclidien \mathcal{E} de dimension 3 détermine une bijection de l'ensemble \mathcal{L} des droites orientées de \mathcal{E} sur le fibré cotangent $T^*\Sigma$ à une sphère Σ de dimension 2. L'image réciproque par cette bijection de la différentielle extérieure de la forme de Liouville de $T^*\Sigma$ est une forme symplectique ω sur \mathcal{L} qui ne dépend pas du choix de O .*

Démonstration. — Soit Σ une sphère de rayon R quelconque, par exemple $R = 1$, centrée en un point $C \in \mathcal{E}$, et soit O un autre point de \mathcal{E} . À chaque droite orientée $L \in \mathcal{L}$ faisons correspondre la forme linéaire

η sur l'espace $T_m\Sigma$ tangent à Σ au point m tel que le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{Cm}$ soit parallèle à L et de même sens, ayant pour expression

$$\eta(\vec{w}) = \overrightarrow{OP} \cdot \vec{w}, \quad \vec{w} \in T_m\Sigma,$$

où P est un point quelconque de la droite L et où $\overrightarrow{OP} \cdot \vec{w}$ est le produit scalaire des vecteurs \overrightarrow{OP} et \vec{w} (figure 3). La forme η est un *covecteur*, élément du fibré cotangent $T^*\Sigma$. L'application $\Phi_O : L \mapsto \eta$ ainsi définie est bijective, puisqu'un covecteur $\eta \in T^*\Sigma$, attaché à un point $m \in \Sigma$, est l'image par Φ_O de la droite orientée L , parallèle au vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{Cm}$ et de même sens, formée par tous les points $P \in \mathcal{E}$ qui vérifient $\overrightarrow{OP} \cdot \vec{w} = \eta(\vec{w})$ pour tout $\vec{w} \in T_m\Sigma$. Il est facile de vérifier qu'elle ne dépend pas du choix du centre C de la sphère Σ . Par contre, si le point O est remplacé par un autre point $O' \in \mathcal{E}$, le covecteur $\eta \in T_m^*\Sigma$ attaché au point $m \in \Sigma$ qui correspond à une droite orientée donnée $L \in \mathcal{L}$ est remplacé par le covecteur $\eta' \in T_m^*\Sigma$, attaché au même point m , ayant pour expression $\eta'(\vec{w}) = \eta(\vec{w}) + \overrightarrow{O'O} \cdot \vec{w}$, où $\vec{w} \in T_m\Sigma$. Le covecteur η' s'écrit aussi $\eta' = \eta + df_{O'O}(m)$, où $f_{O'O} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction différentiable $f_{O'O}(n) = \overrightarrow{O'O} \cdot \overrightarrow{Cn}$, avec $n \in \Sigma$. Les bijections $\Phi_{O'}$ et Φ_O sont donc liées par la relation $\Phi_{O'} = \Psi_{O'O} \circ \Phi_O$, où $\Psi_{O'O} : T^*\Sigma \rightarrow T^*\Sigma$ est le difféomorphisme $\eta \mapsto \eta + df_{O'O}(\pi_\Sigma(\eta))$, $\pi_\Sigma : T^*\Sigma \rightarrow \Sigma$ étant la projection canonique du fibré cotangent sur sa base.

En identifiant \mathcal{L} à $T^*\Sigma$ au moyen de la bijection déterminée par un point $O \in \mathcal{E}$, tous les objets mathématiques définis sur $T^*\Sigma$, notamment la forme de Liouville λ_Σ et sa différentielle extérieure $d\lambda_\Sigma$, peuvent être transférés sur \mathcal{L} , qui est ainsi muni d'une 1-forme différentielle $\lambda_O = \Phi_O^*(\lambda_\Sigma)$ et d'une forme symplectique $d\lambda_O = \Phi_O^*(d\lambda_\Sigma)$. Lorsque le point O est remplacé par un autre point O' de \mathcal{E} , la définition de la forme de Liouville λ_Σ permet de montrer que

$$\Psi_{O'O}^*(\lambda_\Sigma) = \lambda_\Sigma + \pi_\Sigma^*(df_{O'O}),$$

donc que

$$\Psi_{O'O}^*(d\lambda_\Sigma) = d\lambda_\Sigma + \pi_\Sigma^*(d \circ df_{O'O}) = d\lambda_\Sigma,$$

puisque $d \circ d = 0$. Par suite

$$\Phi_{O'}^*(d\lambda_\Sigma) = \Phi_O^*(\Psi_{O'O}^*(d\lambda_\Sigma)) = \Phi_O^*(d\lambda_\Sigma),$$

ce qui prouve que $\omega = \Phi_O^*(d\lambda_\Sigma)$ ne dépend pas du choix de O . \square

4.3. La variété des droites orientées pointées

Afin de donner à la forme symplectique ω de \mathcal{L} une expression comode, adaptée aux notations vectorielles, il est utile de considérer l'ensemble $\widehat{\mathcal{L}}$ dont les éléments sont les droites orientées pointées, c'est-à-dire les couples (L, P) formés d'une droite orientée $L \in \mathcal{L}$ et d'un point P de L . C'est une variété différentiable de dimension 5 qui se projette sur la variété \mathcal{L} de dimension 4, la projection $(L, P) \mapsto L$ consistant à « oublier » le point P . Soit O un point fixé quelconque de \mathcal{E} . Un élément (L, P) de $\widehat{\mathcal{L}}$ peut être représenté par le couple $(\overrightarrow{OP}, \vec{u})$ formé par le vecteur \overrightarrow{OP} et le vecteur directeur unitaire \vec{u} de L . Il existe⁽⁵⁾ sur $\widehat{\mathcal{L}}$ une 2-forme différentielle exacte $\omega_{\widehat{\mathcal{L}}}$ ayant pour expression

$$\omega_{\widehat{\mathcal{L}}}(L, P) = \sum_{i=1}^3 dp_i \wedge du_i = d\overrightarrow{OP} \wedge d\vec{u},$$

où (p_1, p_2, p_3) et (u_1, u_2, u_3) sont les composantes, dans une base orthonormée, des vecteurs \overrightarrow{OP} et \vec{u} . Le signe \wedge dans le membre de droite combine les produits scalaire et extérieur. La forme $\omega_{\widehat{\mathcal{L}}}$ est projetable sur \mathcal{L} et a pour projection la forme symplectique ω de \mathcal{L} . Celle-ci admet donc pour expression

$$\omega(L) = d\overrightarrow{OP} \wedge d\vec{u}, \quad L \in \mathcal{L},$$

car le membre de droite ne dépend pas du choix du point P sur la droite orientée L .

4.4. Proposition. — *Une famille de rayons dépendant différentiablement de 2 paramètres est rectangulaire au sens de 1.3 si et seulement si c'est une sous-variété lagrangienne immergée de la variété symplectique (\mathcal{L}, ω) des droites orientées de l'espace affine euclidien \mathcal{E} .*

Démonstration. — Chaque élément L_0 d'une famille de rayons \mathcal{F} à 2 paramètres possède un voisinage ouvert dans \mathcal{F} image d'une application différentiable injective $L : (k_1, k_2) \mapsto L(k_1, k_2)$, définie sur un ouvert de \mathbb{R}^2 contenant $(0, 0)$, à valeurs dans \mathcal{L} , telle que $L(0, 0) = L_0$. Pour chaque élément $k = (k_1, k_2)$ du domaine de définition de L , notons $\vec{u}(k)$ le vecteur unitaire directeur de $L(k)$ et $P(k)$ un point de $L(k)$. Les points $P(k)$ ne sont pas déterminés de manière unique, mais il est possible

5. Le choix d'un point $O \in \mathcal{E}$ permet d'identifier $\widehat{\mathcal{L}}$ à la restriction $T_{\Sigma}^*\mathcal{E}$ du fibré cotangent $T^*\mathcal{E}$ à la sphère Σ . Dans cette identification $\omega_{\widehat{\mathcal{L}}}$ est la forme induite sur $T_{\Sigma}^*\mathcal{E}$ par la forme symplectique canonique $d\lambda_{\mathcal{E}}$ de $T^*\mathcal{E}$.

de les choisir de manière telle que l'application $k \mapsto (P(k), \vec{u}(k))$ soit différentiable. D'après 4.3,

$$\begin{aligned} L^*\omega &= d(\vec{P}(k) \cdot d\vec{u}(k)) = d\left(d(\vec{P}(k) \cdot \vec{u}(k)) - \vec{u}(k) \cdot d\vec{P}(k)\right) \\ &= -d(\vec{u}(k) \cdot d\vec{P}(k)), \end{aligned}$$

où $\vec{P}(k)$ désigne le vecteur $\overrightarrow{OP}(k)$, O étant un point fixé quelconque de \mathcal{E} . La sous-variété immergée \mathcal{F} est lagrangienne au voisinage de L_0 si et seulement si $L^*\omega = 0$ (voir [9] p. 92, ou [13] p. 123), donc si et seulement si la 1-forme différentielle $\vec{u}(k) \cdot d\vec{P}(k)$ est fermée. D'après le lemme de Poincaré ([14], théorème 4.1 page 121), une 1-forme fermée est localement la différentielle d'une fonction. La sous-variété immergée \mathcal{F} est donc lagrangienne au voisinage de L_0 si et seulement s'il existe une fonction différentiable $k \mapsto F(k)$ définie au voisinage de $(0, 0)$ telle que

$$\vec{u}(k) \cdot d\vec{P}(k) = dF(k). \quad (*)$$

Or pour toute constante $c \in \mathbb{R}$, puisque $\vec{u}(k)$ est unitaire,

$$dF(k) = \vec{u}(k) \cdot d\left((F(k) + c)\vec{u}(k)\right).$$

S'il existe une fonction différentiable F vérifiant (*), elle vérifie donc aussi, pour toute constante $c \in \mathbb{R}$,

$$\vec{u}(k) \cdot d\left(\vec{P}(k) - (F(k) + c)\vec{u}(k)\right) = 0. \quad (**)$$

Supposons \mathcal{F} lagrangienne au voisinage de L_0 , et soit F une fonction différentiable définie au voisinage de $(0, 0)$ qui vérifie (*). Soit Q_0 un point régulier de L_0 . Il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $\vec{P}(0, 0) - (F(0, 0) + c)\vec{u}(0, 0) = \vec{Q}_0$, où \vec{Q}_0 désigne le vecteur $\overrightarrow{OQ_0}$. Les points voisins de Q_0 étant réguliers sur les rayons voisins de L_0 qui les traversent, les variations de $\vec{P}(k) - (F(k) + c)\vec{u}(k)$ pour les petites variations de k au voisinage de $(0, 0)$ engendrent une surface différentiable passant par Q_0 qui, d'après l'égalité (**), est traversée orthogonalement par les rayons $L(k)$ pour tous k assez voisins de $(0, 0)$. La famille \mathcal{F} est donc rectangulaire au voisinage de L_0 .

Réciproquement, supposons \mathcal{F} rectangulaire au voisinage de L_0 . Comme Hamilton (qui fait tacitement cette hypothèse) nous supposons qu'il existe un point régulier sur le rayon L_0 . Il existe alors une surface différentiable passant par ce point traversée orthogonalement

par L_0 et par les rayons $L(k)$ pour tous k assez voisins de $(0,0)$. Cette surface est engendrée par les points $P(k) - F(k)\vec{u}(k)$, lorsque k varie au voisinage de $(0,0)$, F étant une fonction différentiable. Cette fonction vérifie l'égalité (*), donc \mathcal{F} est lagrangienne au voisinage de L_0 . \square

4.5. Proposition. — Soient $M \subset \mathcal{E}$ une surface lisse réfléchissante. L'ensemble U des rayons qui rencontrent transversalement M du côté réfléchissant est un ouvert de \mathcal{L} et l'application qui associe à chaque élément de U le rayon réfléchi correspondant est un difféomorphisme symplectique de U sur sur l'ouvert de \mathcal{L} formé par les mêmes droites avec l'orientation opposée.

Démonstration. — L'ensemble U est un ouvert de \mathcal{L} car il est déterminé par des inégalités strictes. Notons L_1 un élément courant de U , et utilisons les notations de 3.1 (figure 1). Comme dans ce paragraphe, le vecteur \vec{OP} sera noté \vec{P} , O étant un point fixé, choisi de manière quelconque. L'expression de la forme symplectique ω indiquée en 4.3 montre qu'il suffit de prouver que $d\vec{P} \wedge d\vec{u}_2 = d\vec{P} \wedge d\vec{u}_1$. Compte tenu de l'égalité $\vec{u}_2 - \vec{u}_1 = 2(\vec{u}_1 \cdot \vec{n})\vec{n}$ qui exprime les lois de la réflexion,

$$\begin{aligned} d\vec{P} \wedge d(\vec{u}_2 - \vec{u}_1) &= 2d\vec{P} \wedge d((\vec{u}_1 \cdot \vec{n})\vec{n}) \\ &= -2d((\vec{u}_1 \cdot \vec{n})(\vec{n} \cdot d\vec{P})) \\ &= 0, \end{aligned}$$

car $\vec{n} \cdot d\vec{P} = 0$, $d\vec{P}$ étant tangent et \vec{n} normal à M en P . \square

4.6. Proposition. — Soit $R \subset \mathcal{E}$ une surface lisse séparant deux milieux transparents d'indices de réfraction différents n_1 et n_2 . L'ensemble U des rayons qui rencontrent transversalement R du côté du milieu d'indice de réfraction n_1 et qui se réfractent dans le milieu d'indice de réfraction n_2 est un ouvert de \mathcal{L} , et l'application qui associe à chaque élément de U le rayon réfracté correspondant est un difféomorphisme symplectique de l'ouvert U de $(\mathcal{L}, n_1\omega)$ sur un ouvert de $(\mathcal{L}, n_2\omega)$.

Démonstration. — Les notations étant les mêmes que dans la démonstration de 4.5, soit \vec{v}_1 la projection orthogonale de \vec{u}_1 sur le plan tangent en P à R . D'après les lois de la réfraction de Snell-Descartes, le rayon réfracté correspondant L_2 , s'il existe, a un vecteur unitaire directeur \vec{u}_2 dont la projection orthogonale \vec{v}_2 sur le plan tangent en P à R vérifie $n_2\vec{v}_2 = n_1\vec{v}_1$, ou $n_2(\vec{u}_2 - (\vec{u}_2 \cdot \vec{n})\vec{n}) = n_1(\vec{u}_1 - (\vec{u}_1 \cdot \vec{n})\vec{n})$.

Lorsqu'elle peut être satisfaite, cette égalité détermine \vec{u}_2 , donc le rayon réfracté L_2 . C'est toujours le cas lorsque $n_1 \leq n_2$, mais dans le cas contraire elle peut être satisfaite par un rayon L_2 transverse à R si et seulement si $(n_1/n_2)\|\vec{v}_1\| < 1$, c'est-à-dire si et seulement si l'angle α_1 que fait le rayon L_1 avec la normale en P à M vérifie $\sin \alpha_1 < n_2/n_1$ ⁽⁶⁾. Étant défini par une inégalité stricte, l'ensemble U est ouvert.

Pour établir le résultat annoncé il suffit, comme pour la preuve de 4.5, de montrer que $n_2 d\vec{P} \wedge d\vec{u}_2 = n_1 d\vec{P} \wedge d\vec{u}_1$. Nous avons

$$\begin{aligned} d\vec{P} \wedge (n_2 d\vec{u}_2 - n_1 d\vec{u}_1) &= d\vec{P} \wedge d(n_2(\vec{u}_2 \cdot \vec{n})\vec{n} - n_1(\vec{u}_1 \cdot \vec{n})\vec{n}) \\ &= -d\left((n_2(\vec{u}_2 \cdot \vec{n}) - n_1(\vec{u}_1 \cdot \vec{n}))(\vec{n} \cdot d\vec{P})\right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

car $\vec{n} \cdot d\vec{P} = 0$, $d\vec{P}$ étant tangent à R et \vec{n} normal à R en P . \square

5. Conclusion

Puisque les réflexions sur (4.5) et les réfractions à travers (4.6) une surface lisse sont des difféomorphismes symplectiques et que l'application composée de plusieurs difféomorphismes symplectiques est un difféomorphisme symplectique, la propagation de la lumière à travers un système optique comportant un nombre quelconque de telles réflexions ou de réfractions est un difféomorphisme symplectique. L'image d'une sous-variété lagrangienne par un difféomorphisme symplectique est une sous-variété lagrangienne. Une famille de rayons rectangulaire étant une sous-variété lagrangienne immergée de \mathcal{L} , la proposition 4.4 fournit une preuve du théorème de Malus-Dupin (1.4) différente de celle de Hamilton.

6. Remerciements

Je remercie chaleureusement Géry de Saxcé de m'avoir invité à faire un exposé au 58-ème colloque Souriau à Aix-en-Provence, et pour tous les efforts qu'il fait pour assurer le succès et la pérennité de ces colloques.

Je dois à Dominique Flament d'avoir cherché une preuve du théorème de Malus-Dupin utilisant la géométrie symplectique, après avoir présenté

6. Si cette condition n'est pas satisfaite le rayon incident subit une réflexion totale.

à son séminaire *Histoires de Géométries* un exposé sur les travaux de Hamilton en optique géométrique.

Je remercie très vivement Damien Gayet et le « referee » anonyme dont les observations et recommandations judicieuses m'ont permis d'améliorer notablement ce travail.

Références

- [1] V.I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, second edition. Springer-Verlag, New York, 1978.
- [2] A. W. Conway and J. L. Synge, *Appendix Editors to Sir William Rowan Hamilton mathematical Works, vol. I* pp. 463–464. Cambridge University Press, London, 1931.
- [3] C. Dupin, *Applications de la géométrie*, Mémoire présenté à l'Académie des Sciences en 1816, publié à Paris en 1822.
- [4] V. Guillemin and S. Sternberg, *Symplectic techniques in physics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.
- [5] W. R. Hamilton, *On Caustics, Part First*. Manuscript, 1824. In *Sir William Rowan Hamilton mathematical Works*, vol. I, chapter XV, Cambridge University Press, London, 1931.
- [6] W. R. Hamilton, *Theory of systems of rays, Part First and Part Second (1827)*. Part first : Trans. Royal Irish Academy, 15 (1828), pp. 69–174. Part Second : manuscript. In *Sir William Rowan Hamilton mathematical Works*, vol. I, chapter I, Cambridge University Press, London, 1931.
- [7] J.-L. Lagrange, *Mécanique analytique*. Première édition chez la veuve Desaint, Paris 1808. Quatrième édition (la plus complète) dans *Œuvres de Lagrange*, volumes XI et XII, Gauthier-Villars, Paris, 1888.
- [8] C. Laurent-Gengoux, A. Pichereau and P. Vanhaecke, *Poisson structures*. Springer Verlag, Berlin, Heisenberg, 2013.
- [9] P. Libermann and C.-M. Marle, *Symplectic geometry and analytical mechanics*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1987.
- [10] É. L. Malus, *Journal de l'École Polytechnique* 7 (1808), 1–44 et 84–129.
- [11] É. L. Malus, *Traité d'optique*. Mémoires présentés à l'Institut par divers savans, 2 (1811), 214–302.
- [12] É. L. Malus, *L'agenda de Malus, Souvenirs de l'expédition d'Égypte 1798–1801*. Honoré Champion, Paris, 1892.
- [13] J.-P. Ortega and T. S. Ratiu, *Momentum maps and Hamiltonian reduction*, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2004.

- [14] S. Sternberg, *Lectures on Differential Geometry*. Prentice Hall 1964.

23 décembre 2015

C.-M. MARLE, 27 avenue du 11 novembre 1918, 92190 Meudon, France

E-mail : `charles-michel.marle@math.cnrs.fr`

Url : `http://marle.perso.math.cnrs.fr/`