

# Systemes dynamiques et champs de vecteurs

Charles-Michel Marle

Université Pierre et Marie Curie, Institut de Mathématiques,  
4, place Jussieu, 75252 Paris cedex, France  
charles-michel.marle@polytechnique.org

## Résumé

Cet article se propose d'indiquer les concepts de base de la théorie des systèmes dynamiques, dus pour la plupart à Henri Poincaré : trajectoires, orbites (en particulier orbites périodiques), portrait de phases, ensembles limites, générateur ou générateur infinitésimal, points d'équilibre. Quelques résultats importants, comme le théorème de Poincaré-Bendixson, sont énoncés.

## Qu'appelle-t-on système dynamique ?

La théorie mathématique des systèmes dynamiques a pour origine l'étude de certains systèmes physiques dont l'état, à un instant donné, détermine les états successifs à tous les instants ultérieurs. Afin de permettre au lecteur d'en avoir une idée intuitive, nous allons considérer un exemple étudié en Mécanique céleste : le système solaire. Il semble raisonnable, au moins en première approximation, de ne considérer que les dix planètes principales (Soleil, Mercure, Vénus, Terre, Mars, Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune, Pluton), et de les traiter comme des points matériels, comme si toute la masse de chaque planète était concentrée en un point, son centre de masse ; leurs dimensions sont en effet très petites comparées aux distances qui les séparent. Nous supposons aussi que la masse de chacune des planètes reste invariable au cours du temps (ce qui n'est vrai qu'en première approximation, la masse du Soleil variant très lentement en raison des réactions nucléaires qui ont lieu en son sein, l'énergie produite par ces réactions s'échappant sous forme de rayonnement, et des pertes de matière lors des éruptions solaires, et les masses des planètes pouvant varier aussi en raison de la perte d'une partie de leurs atmosphères, des éruptions volcaniques et des chutes de météorites). C'est donc un modèle simplifié du système solaire vrai qu'étudie la Mécanique céleste ; mais pour alléger le langage, nous appellerons *Système solaire* ce modèle simplifié.

Il convient de bien préciser ce qu'on appelle *état* du système à un instant donné. La connaissance, à cet instant, des *positions* dans l'espace des dix points matériels représentant les dix planètes ne suffit pas : il faut connaître aussi la *vitesse* (évaluée relativement à un référentiel galiléen choisi une fois pour toutes), à l'instant considéré, de chacun de ces points matériels ; autrement dit, par *état* du système, il faut entendre *état cinématique*. L'*état* de notre modèle simplifié de système solaire à un instant donné est donc constitué par la donnée de dix points distincts de l'espace physique (les positions des dix planètes) et de dix vecteurs de cet espace (les vitesses des planètes). Cet ensemble est appelé *espace des états cinématiques* (ou parfois *espace des phases*) de notre modèle de système solaire, et noté  $\Omega$ .

Nous devons aussi choisir comment représenter mathématiquement l'espace et le temps physiques. Comme il est d'usage en Mécanique classique (non relativiste) l'espace physique sera, grâce au choix d'une unité de longueur, assimilé à un espace affine euclidien de dimension 3, et le temps physique, grâce au choix d'une origine et d'une unité de temps, à l'ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels.

La dimension de l'ensemble  $\Omega$  des états cinématiques du système solaire est donc  $10 \times 3 + 10 \times 3 = 60$ . L'évolution de l'état de ce système au cours du temps est représentée par une courbe, tracée dans  $\Omega$ , paramétrée par le temps. Depuis Newton, on connaît les équations qui régissent cette évolution, et on sait, sinon les résoudre explicitement, du moins prouver l'existence et l'unicité de la solution maximale (c'est-à-dire définie sur l'intervalle de temps le plus grand possible) satisfaisant une donnée initiale spécifiée, c'est-à-dire passant, à un instant initial  $t_0$ , par un élément (nous dirons souvent, par abus de langage, un *point*) donné  $x_0$  de  $\Omega$ . On sait aussi déterminer approximativement par calcul cette solution maximale : l'existence des éphémérides en est la preuve.

Les solutions maximales ne sont pas toujours définies pour toutes les valeurs du temps car lorsque celui-ci varie, soit vers le passé, soit vers le futur, il arrive qu'on atteigne un instant critique où le système change de nature, soit parce que les points représentatifs de deux planètes distinctes deviennent confondus (on dit alors qu'il y a *collision* des deux planètes si cela arrive lorsque le temps croît, ou *éjection* d'une planète par une autre si cela arrive lorsque le temps décroît), soit parce qu'une des planètes s'éloigne à l'infini. Les seules équations de la mécanique céleste ne peuvent permettre de prolonger la solution considérée au delà d'un tel instant critique. C'est pourquoi à chaque instant  $t_0$  et chaque élément  $x_0$  de  $\Omega$  est associé un intervalle de temps  $I_{(t_0, x_0)}$ , contenant  $t_0$ , tel que la solution maximale des équations de la mécanique céleste prenant la valeur  $x_0$  à l'instant  $t_0$  existe pour les valeurs du temps  $t$  appartenant à l'intervalle  $I_{(t_0, x_0)}$ . En donnant toutes les valeurs possibles à l'instant initial  $t_0$  et à l'état initial  $x_0$  du système, on voit qu'il existe une application  $\Phi$ , définie sur une partie  $D$  du produit  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Omega$  et à valeurs dans  $\Omega$ , ayant les propriétés suivantes :

- pour chaque instant  $t_0$  et chaque élément  $x_0$  de  $\Omega$ , l'ensemble des  $t$  tels que  $(t, t_0, x_0)$  soit élément du domaine  $D$  sur lequel l'application  $\Phi$  est définie est l'intervalle de temps  $I_{(t_0, x_0)}$  sur lequel est définie la solution maximale des équations de la Mécanique céleste prenant la valeur  $x_0$  à l'instant  $t_0$  ;
- cette solution maximale est la courbe paramétrée qui, à chaque instant  $t$  élément de  $I_{(t_0, x_0)}$ , associe l'élément  $\Phi(t, t_0, x_0)$  de  $\Omega$ .

L'application  $\Phi$  regroupe, en un seul objet mathématique, toutes les solutions maximales des équations qui régissent l'évolution du système solaire. On l'appelle *flot* de ces équations. L'unicité de la solution maximale prenant une valeur donnée à un instant initial donné montre qu'elle possède l'importante propriété suivante.

Soient  $t_0, t_1$  et  $t_2$  trois instants, et  $x_0$  un élément de  $\Omega$ . Supposons que  $(t_1, t_0, x_0)$  soit élément de  $D$ , c'est-à-dire que  $\Phi(t_1, t_0, x_0)$  soit défini. Alors, dès que l'un des deux membres de l'égalité

$$\Phi(t_2, t_1, \Phi(t_1, t_0, x_0)) = \Phi(t_2, t_0, x_0) \quad (*)$$

est défini, l'autre membre l'est aussi et l'égalité est satisfaite.

Le choix de l'origine du temps est arbitraire et ne saurait avoir d'influence sur l'évolution du système solaire ; par suite,  $\Phi(t, t_0, x_0)$  ne dépend que de la différence  $t - t_0$ , et non pas séparément de  $t$  et de  $t_0$ . L'application  $\Phi$  est donc déterminée par une autre application plus simple  $\Psi$  (fonction de deux variables seulement au lieu de trois), définie sur une partie  $\Delta$  de  $\mathbb{R} \times \Omega$ ,

$$\Psi(\theta, x_0) = \Phi(\theta, 0, x_0).$$

En effet lorsque  $\Psi$  est connue,  $\Phi$  l'est aussi puisque  $\Phi(t, t_0, x_0) = \Psi(t - t_0, x_0)$ . L'application  $\Psi$  est appelée *flot réduit* des équations qui régissent l'évolution du système solaire. L'importante propriété du flot  $\Phi$  exprimée par l'égalité (\*) ci-dessus se traduit, pour le flot réduit  $\Psi$ , comme suit.

Soient  $\theta_1$  et  $\theta_2$  deux intervalles de temps et  $x_0$  un point de  $\Omega$ . Supposons que  $(\theta_1, x_0)$  soit élément de  $\Delta$ , c'est-à-dire que  $\Psi(\theta_1, x_0)$  soit défini. Alors, dès que l'un des deux membres de l'égalité

$$\Psi(\theta_2, \Psi(\theta_1, x_0)) = \Psi(\theta_2 + \theta_1, x_0) \quad (**)$$

est défini, l'autre membre l'est aussi et l'égalité est satisfaite. Cette égalité exprime, en termes mathématiques, la propriété évidente suivante. Supposons qu'en un intervalle de temps  $\theta_1$  le système évolue, à partir de l'état  $x_0$ , jusqu'à l'état  $x_1 = \Psi(\theta_1, x_0)$ . Si en un intervalle de temps  $\theta_2$  il évolue de l'état  $x_1$  à l'état  $x_2 = \Psi(\theta_2, x_1)$ , alors en un intervalle de temps  $\theta_2 + \theta_1$ , le système évolue de l'état  $x_0$  à l'état  $x_2 = \Psi(\theta_2 + \theta_1, x_0)$ . Inversement, si en un intervalle de temps  $\theta_2 + \theta_1$  il évolue de l'état  $x_0$  à l'état  $x_2 = \Psi(\theta_2 + \theta_1, x_0)$ , alors en un intervalle de temps  $\theta_2$  il évolue de l'état  $x_1$  à l'état  $x_2 = \Psi(\theta_2, x_1)$ . Ainsi,  $(\theta_2, x_1)$  est élément de  $\Delta$ , c'est-à-dire  $\Psi(\theta_2, x_1)$  est défini, si et seulement si  $(\theta_2 + \theta_1, x_0)$  est élément de  $\Delta$ , c'est-à-dire si et seulement si  $\Psi(\theta_2 + \theta_1, x_0)$  est défini ; et lorsque c'est le cas l'égalité (\*\*\*) est satisfaite.

Introduisons une nouvelle notation. Pour chaque valeur fixée de l'intervalle de temps  $\theta$ , notons  $\Psi_\theta$  l'application partielle obtenue en donnant à la première variable dont dépend  $\Psi$  la valeur fixée  $\theta$ . Cette application est définie sur la partie (éventuellement vide), notée  $\Omega_\theta$ , de  $\Omega$ , ensemble des états  $x$  tels que  $(\theta, x)$  soit élément de  $\Delta$  ; elle prend ses valeurs dans  $\Omega$  ; à chaque état  $x$  élément de  $\Omega_\theta$  elle fait correspondre

$$\Psi_\theta(x) = \Psi(\theta, x).$$

La propriété exprimée par l'égalité (\*\*\*) ci-dessus s'écrit, avec cette nouvelle notation,

$$\Psi_{\theta_2} \circ \Psi_{\theta_1} = \Psi_{\theta_2 + \theta_1}, \quad (***)$$

où  $\Psi_{\theta_2} \circ \Psi_{\theta_1}$ , dans le membre de gauche, désigne l'application composée obtenue en appliquant  $\Psi_{\theta_1}$  à chaque élément  $x$  de  $\Omega_{\theta_1}$ , puis  $\Psi_{\theta_2}$  à l'élément  $\Psi_{\theta_1}(x)$ .

Faisons encore deux remarques avant de proposer une définition de la notion de système dynamique.

**Première remarque.** L'état du système solaire évolue en fonction du temps qui, dans la schématisation mathématique considérée, varie de manière continue. L'état de nombreux autres systèmes physiques varie en fonction d'un paramètre discret ; par exemple, l'état d'une pièce de métal forgé recevant des coups de marteau évolue en fonction du nombre de coups reçus ; l'application de retour de Poincaré définie plus loin donnera un autre exemple de système dont l'état évolue en fonction d'un paramètre discret ; l'étude numérique de systèmes dont l'état évolue en fonction du temps se fait souvent en *discrétisant* celui-ci, c'est-à-dire en ne considérant l'état du système qu'à des instants régulièrement espacés, formant une suite discrète. La définition d'un système dynamique devra inclure tous ces exemples.

**Deuxième remarque.** Lorsqu'à un instant initial  $t_0$  donné, l'état initial  $x_0$  du système solaire est donné, l'état de ce système est déterminé par les équations régissant son évolution aussi bien pour des instants antérieurs que pour des instants postérieurs à  $t_0$ . Les équations d'évolution d'autres systèmes physiques ne permettent de déterminer l'état du système qu'à des instants postérieurs à l'instant initial  $t_0$ . La définition d'un système dynamique devra les inclure.

Voici enfin comment définir la notion de système dynamique.

**Définition.** Soit  $\Theta$  un ensemble qui pourra être soit l'ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels, soit l'ensemble  $\mathbb{Z}$  des nombres entiers de signes quelconques, soit l'ensemble  $\mathbb{R}^+$  des nombres réels non négatifs, soit l'ensemble  $\mathbb{N}$  des entiers (dits naturels) non négatifs. On appelle *système dynamique* sur un ensemble  $\Omega$  une application  $\Psi$ , définie sur une partie  $\Delta$  de l'ensemble produit  $\Theta \times \Omega$  et à valeurs dans  $\Omega$ , vérifiant les propriétés suivantes.

1. Pour chaque élément  $x$  de  $\Omega$ ,  $(0, x)$  est élément de  $\Delta$  et  $\Psi(0, x) = x$ .
2. Soient un élément  $\theta$  de  $\Theta$  et un élément  $x$  de  $\Omega$ , tels que  $(\theta, x)$  soit élément de  $\Delta$ . Alors pour tout élément  $\theta'$  de  $\Theta$  compris entre 0 et  $\theta$  (c'est-à-dire vérifiant  $0 \leq \theta' \leq \theta$  si  $0 \leq \theta$ , ou  $\theta \leq \theta' \leq 0$  si  $\theta \leq 0$ , ce qui suppose  $\Theta = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{Z}$ ),  $(\theta', x)$  est élément de  $\Delta$ .
3. Soient  $\theta_1$  et  $\theta_2$  deux éléments de  $\Theta$  et  $x$  un élément de  $\Omega$ . On suppose  $(\theta_1, x)$  élément de  $\Delta$ . Alors, si l'un des deux membres de l'égalité

$$\Psi(\theta_2, \Psi(\theta_1, x)) = \Psi(\theta_2 + \theta_1, x)$$

est défini, l'autre membre l'est aussi et l'égalité est vérifiée.

Les ensembles  $\Omega$  et  $\Theta$  sont appelés, respectivement, *ensemble des états* ou *espace des phases*, et *ensemble des intervalles de temps* du système dynamique. Ce système est dit à *temps continu* si  $\Theta = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}^+$ , et à *temps discret* si  $\Theta = \mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{N}$ .

Comme nous l'avons déjà fait lors de l'étude du système solaire, pour chaque élément  $\theta$  de  $\Theta$ , nous noterons  $\Psi_\theta$  l'application partielle, définie sur la partie  $\Omega_\theta$  de  $\Omega$  constituée par les éléments  $x$  tels que  $(\theta, x)$  soit élément de  $\Delta$ , qui à  $x$  associe  $\Psi_\theta(x) = \Psi(\theta, x)$ . Au lieu de dire *le système dynamique*  $\Psi$ , nous dirons souvent *le système dynamique*  $\{\Psi_\theta, \theta \in \Theta\}$ <sup>1</sup>, puisque la donnée de l'application  $\Psi$  équivaut à celle des applications partielles  $\Psi_\theta$  pour tous les éléments  $\theta$  de  $\Theta$ .

**Remarque.** La définition donnée ci-dessus privilégie le futur plutôt que le passé, car elle englobe les systèmes dont l'ensemble des intervalles de temps est  $\mathbb{R}^+$  ou  $\mathbb{N}$ , tandis qu'elle exclut ceux dont tous les intervalles de temps sont inférieurs ou égaux à 0 : le lecteur vérifiera en effet que si l'ensemble des intervalles de temps d'un système dynamique (au sens de la définition ci-dessus) contient un élément  $\theta < 0$  il contient aussi nécessairement  $-\theta > 0$ , donc est  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{Z}$ . Bien entendu, cela n'est dû qu'aux choix faits pour définir la notion de système dynamique ; il est possible que pour des usages tels que l'archéologie qui étudie le passé plutôt que le futur, des conventions différentes soient préférables.

La proposition suivante indique une importante propriété des systèmes dont l'ensemble des intervalles de temps est  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{Z}$ .

**Proposition.** Considérons un système dynamique  $\Psi$  sur un ensemble  $\Omega$ , dont l'ensemble  $\Theta$  des intervalles de temps est  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{Z}$ . Pour tout élément  $\theta$  de  $\Theta$ , l'application  $\Psi_\theta$ , définie sur la partie (supposée non vide)  $\Omega_\theta$  de  $\Omega$ , est injective ; son image est  $\Psi_\theta(\Omega_\theta) = \Omega_{-\theta}$  ; en la considérant comme application de  $\Omega_\theta$  sur  $\Omega_{-\theta}$ , on peut donc en prendre l'inverse  $(\Psi_\theta)^{-1}$ , qui n'est autre que  $\Psi_{-\theta}$ . On dit qu'un tel système dynamique évolue *sans perte d'information*.

## Trajectoires, orbites, ensembles limites, portrait de phases

Dans ce paragraphe,  $\Psi$  est un système dynamique sur un ensemble  $\Omega$ , dont l'ensemble des intervalles de temps est noté  $\Theta$ .

**Définitions.** Soit  $x$  un élément de  $\Omega$ .

1. On appelle *trajectoire* de  $x$  l'application, définie sur la partie  $\Theta_x$  de  $\Theta$  constituée par les éléments  $\theta$  tels que  $(\theta, x)$  appartienne à la partie  $\Delta$  de  $\Theta \times \Omega$  sur laquelle l'application  $\Psi$  est définie, qui à chaque  $\theta$  fait correspondre  $\Psi(\theta, x)$ .
2. On appelle *orbite* de  $x$  la partie de  $\Omega$  constituée par tous les éléments  $\Psi(\theta, x)$ , pour tous les  $\theta$  pour lesquels  $\Psi(\theta, x)$  est défini.
3. On dit que  $x$  est un *point d'équilibre* du système dynamique si son orbite ne comporte aucun autre point que  $x$ .
4. On dit que l'orbite de  $x$  est *périodique* si  $x$  n'est pas un point d'équilibre et s'il existe un élément  $T > 0$  de  $\Theta$  tel que  $(T, x)$  soit élément de  $\Delta$  et que  $\Psi(T, x) = x$ . On dit alors que  $T$  est une *période* de l'orbite de  $x$ .

Dans ses travaux [12, 13, 14, 15], Henri Poincaré appelle *points singuliers* ce que nous appelons *points d'équilibre*.

L'orbite d'un point  $x$  de  $\Omega$  contient bien sûr ce point. Lorsque le système dynamique considéré évolue sans perte d'information, il est facile de montrer que si les orbites de deux points distincts de  $\Omega$  ont un élément en commun, elles sont confondues. L'appartenance à une même orbite est donc, pour les systèmes évoluant sans perte d'information, une *relation d'équivalence* ; la partition de  $\Omega$  en orbites est appelée *portrait de phases* du système dynamique. Lorsque sur une figure on

---

1. Le caractère  $\in$  figurant dans cette expression est le symbole d'appartenance ; il indique l'appartenance de l'élément  $\theta$  à l'ensemble  $\Theta$ .

représente le portrait de phases d'un système dynamique à temps continu, il est d'usage de placer, sur les courbes représentant les orbites, des flèches pour indiquer le sens de parcours lorsque le temps croît. Nous l'avons fait sur les figures ci-après.

Nous allons maintenant faire une hypothèse sur l'ensemble  $\Omega$ , qui jusqu'à présent pouvait être un ensemble quelconque.

**Définitions.** L'ensemble  $\Omega$  est maintenant supposé être un espace topologique séparé<sup>2</sup>. Soit  $x$  un élément de  $\Omega$ , et  $\Theta_x$  l'ensemble des éléments  $\theta$  de  $\Theta$  tels que  $(\theta, x)$  soit élément de  $\Delta$ . On suppose  $\Theta_x$  non borné à gauche (resp., à droite). On appelle *ensemble  $\alpha$ -limite* de  $x$  et on note  $L_\alpha(x)$  (resp., ensemble  $\omega$ -limite<sup>3</sup> de  $x$  et on note  $L_\omega(x)$ ) l'ensemble des *valeurs d'adhérence*<sup>4</sup> de la trajectoire de  $x$  lorsque  $\theta$  tend vers  $-\infty$  (resp., vers  $+\infty$ ).

On montre aisément que les ensembles limites d'un point sont toujours des parties *fermées* de  $\Omega$ , et que deux points appartenant à la même orbite ont les mêmes ensembles limites. On peut donc parler des ensembles limites d'une orbite ; ce sont ceux d'un point quelconque de cette orbite. Dans le cas où le système dynamique considéré est à temps continu, si de plus, pour tout point  $x$  de  $\Omega$ , la trajectoire de  $x$  est une application continue, l'orbite d'un point quelconque d'un ensemble limite est contenue dans cet ensemble limite.

## Générateur et générateur infinitésimal

Un système dynamique à temps discret sur un ensemble  $\Omega$  est entièrement déterminé par la donnée d'une seule application d'une partie de  $\Omega$  dans  $\Omega$ , appelée son *générateur*, définie ci-dessous.

**Définition.** Soit  $\{\Psi_n ; n \in \Theta\}$ , avec  $\Theta = \mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{N}$ , un système dynamique à temps discret sur un ensemble  $\Omega$ . On appelle *générateur* de ce système l'application  $\Psi_1$ , définie sur la partie  $\Omega_1$  de  $\Omega$  (ensemble des  $x$  tels que  $\Psi(1, x)$  soit défini), et à valeurs dans  $\Omega$ .

Ce système dynamique à temps discret est entièrement déterminé par son générateur  $\Psi_1$ . On sait en effet que  $\Psi_0$  est l'application identique de  $\Omega$  et on montre aisément que pour tout entier  $n > 0$ ,  $\Psi_n$  s'obtient en composant  $n$  fois  $\Psi_1$ <sup>5</sup> ; on dit que  $\Psi_n$  est la  *$n$ -ième itérée* de  $\Psi_1$ . Si  $\Theta = \mathbb{Z}$ ,  $\Psi_{-n}$  n'est autre que l'inverse  $(\Psi_n)^{-1}$  de  $\Psi_n$ , c'est la  *$n$ -ième itérée* de  $\Psi_{-1}$ , qui elle-même est l'inverse  $(\Psi_1)^{-1}$  de  $\Psi_1$ .

Il existe pour les systèmes dynamiques à temps continu une notion analogue, celle de *générateur infinitésimal* ; mais pour pouvoir l'utiliser, nous devons faire de nouvelles hypothèses sur l'ensemble  $\Omega$  et l'application  $\Psi$ . Nous supposons que  $\Omega$  est une *variété indéfiniment différentiable*<sup>6</sup>, que  $\Theta = \mathbb{R}$  (et non pas  $\mathbb{R}^+$ ), que la partie  $\Delta$  de  $\mathbb{R} \times \Omega$  sur laquelle l'application  $\Psi$  est définie est *ouverte* et que  $\Psi$  est *indéfiniment différentiable*. Lorsque toutes ces hypothèses sont satisfaites, nous dirons que  $\{\Psi_t, t \in \mathbb{R}\}$  est un *système dynamique différentiable*.

2. Un espace topologique est un ensemble muni d'une *structure topologique*, qui permet de donner un sens aux notions de voisinage d'un point, de convergence, de limite. Par exemple, un espace métrique, dans laquelle la notion de distance de deux points a un sens, est un espace topologique. Un espace topologique est dit *séparé* si deux points distincts possèdent des voisinages disjoints. Un espace métrique est automatiquement séparé.

3. L'origine de ces termes est la suivante ; la première lettre,  $\alpha$ , et la dernière lettre,  $\omega$ , de l'alphabet grec sont employées pour désigner le début et la fin de toutes choses. "Je suis l'alpha et l'omega, dit le Seigneur Dieu qui est, qui était et qui vient, le tout-puissant. ... Je suis l'alpha et l'omega, le premier et le dernier, le commencement et la fin". Apocalypse de Jean, I.8 et XXII.13.

4. Un élément  $a$  de  $\Omega$  est valeur d'adhérence de la trajectoire de  $x$  lorsque  $\theta$  tend vers  $+\infty$  s'il existe une suite  $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, \dots)$  de valeurs de  $\theta$ , tendant vers  $+\infty$ , telle que la suite  $(\Psi(\theta_1, x), \Psi(\theta_2, x), \dots, \Psi(\theta_n, x), \dots)$  tende vers  $a$ .

5. On a  $\Psi_2 = \Psi_1 \circ \Psi_1$ ,  $\Psi_3 = \Psi_1 \circ \Psi_2$  et plus généralement pour tout entier  $n > 0$ ,  $\Psi_n = \Psi_1 \circ \Psi_{n-1}$ .

6. Une variété indéfiniment différentiable de dimension  $n$  est un espace topologique séparé dont tout point possède un voisinage dans lequel existe un système de coordonnées locales  $(x_1, \dots, x_n)$  permettant d'identifier ce voisinage à une petite boule ouverte de  $\mathbb{R}^n$ . On dit alors que ce système de coordonnées locales est une *carte locale* de la variété (par analogie avec les cartes de géographie de la Terre). On exige de plus que dans le domaine commun à deux cartes, les coordonnées locales de l'une des cartes s'expriment en fonction des coordonnées locales de l'autre carte, par des expressions indéfiniment différentiables, c'est-à-dire ayant des dérivées partielles de tous les ordres continues.

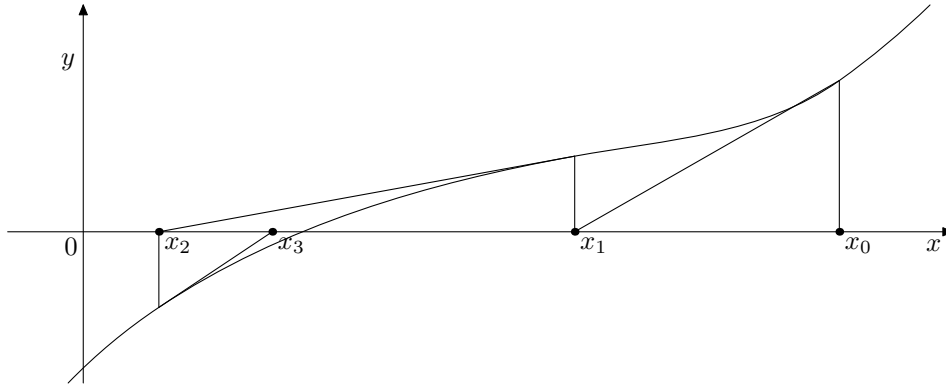


FIGURE 1 – La méthode de Newton

**Définition.** Soit  $\{\Psi_t, t \in \mathbb{R}\}$  un système dynamique différentiable. On appelle *générateur infinitésimal de ce système* le champ de vecteurs  $X$  sur  $\Omega$  dont la valeur, en chaque point  $x$  de  $\Omega$ , est la dérivée par rapport  $t$  de la trajectoire de  $x$ , prise à l’instant  $t = 0$  :

$$X(x) = \left. \frac{d}{dt} (\Psi_t(x)) \right|_{t=0} .$$

Le générateur infinitésimal de  $\{\Psi_t, t \in \mathbb{R}\}$  est, avec les hypothèses que nous avons faites (que l’on pourrait d’ailleurs affaiblir), un champ de vecteurs indéfiniment différentiable. Un théorème bien connu, dit de *Cauchy-Lipschitz*, permet d’affirmer que ce champ de vecteurs détermine entièrement le système, qui n’est autre que son *flot réduit* (notion que nous avons rencontrée ci-dessus dans l’exemple du système solaire).

Le lecteur remarquera qu’un système dynamique à temps continu dont le générateur infinitésimal est un champ de vecteurs indéfiniment différentiable évolue toujours sans perte d’information.

## Exemples de systèmes dynamiques

Nous présenterons dans ce paragraphe deux exemples : un système à temps discret (la méthode de Newton) et un système à temps continu (le pendule plan).

**La méthode de Newton.** Soit  $f$  une fonction différentiable, définie sur intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbb{R}$ , à valeurs réelles. Le lecteur connaît probablement déjà la *méthode de Newton* pour déterminer, par approximations successives, les solutions de l’équation  $f(x) = 0$ . Cette méthode consiste à choisir un élément  $x_0$  de  $I$ , à calculer  $y_0 = f(x_0)$ , puis, si  $y_0 \neq 0$ , à déterminer la tangente, au point de coordonnées  $(x_0, y_0)$ , au graphe de la fonction  $f$ , et à chercher l’abscisse  $x_1$  du point où cette tangente coupe l’axe des abscisses. Si  $x_1 \in I$ , on recommence toute la construction en remplaçant  $x_0$  par  $x_1$ , et on obtient ainsi  $x_2$ . On construit ainsi, de proche en proche, une suite  $(x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$  de points de  $I$  (figure 1). Lorsque cette suite converge vers un élément  $x$  de  $I$ , ce point est une solution de l’équation  $f(x) = 0$ .

La méthode de Newton consiste à construire l’orbite issue du point  $x_0$  du système dynamique à temps discret ayant pour générateur l’application  $\mathcal{N}$ , à valeurs réelles, définie sur l’ensemble  $\Omega_1$  des points de  $I$  en lesquels la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$  est non nulle, ayant pour expression

$$\mathcal{N}(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} .$$

Les points d’équilibre de ce système dynamique sont les éléments  $x$  de  $I$  tels que  $f(x) = 0$  et  $f'(x) \neq 0$ .

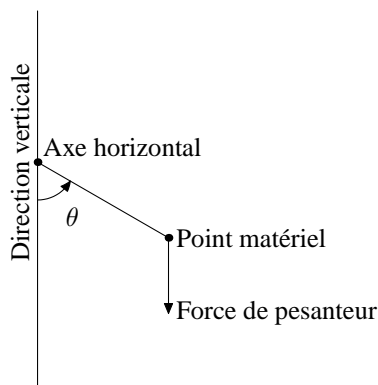


FIGURE 2 – Pendule plan

**Le pendule plan.** Considérons (figure 2) un point matériel de masse  $m$ <sup>7</sup>, attaché à une extrémité d'une tige rectiligne rigide de longueur  $l$  et de masse négligeable. La tige peut tourner autour de son autre extrémité dans un plan vertical fixe. Le frottement est supposé négligeable. On appelle  $\theta$  l'angle (orienté) que fait le pendule avec la verticale, cet angle étant 0 (resp.,  $\pi$ ) si le pendule est en position verticale avec le point matériel au dessous (resp., au dessus) du point d'attache.

Les équations du mouvement sont

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \omega, \\ \frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l} \sin \theta. \end{cases}$$

Nous avons noté  $g$  l'accélération de la pesanteur. Le champ de vecteurs associé à cette équation différentielle est le générateur d'un système dynamique différentiable dont nous allons décrire le portrait de phases. En apparence, l'espace des phases du système est le plan  $\mathbb{R}^2$ , avec pour coordonnées  $\theta$  et  $\omega$ . En examinant les choses de plus près, nous voyons qu'en fait  $\theta$  n'est pas un réel, mais un angle, c'est-à-dire un élément du cercle trigonométrique  $S^1$ , isomorphe à  $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ . L'espace des phases est donc non pas  $\mathbb{R}^2$ , mais le produit  $S^1 \times \mathbb{R}$ , c'est-à-dire un cylindre (exemple simple de variété indéfiniment différentiable). Nous pouvons cependant étudier le système comme si son espace des phases était  $\mathbb{R}^2$  (on dit que  $\mathbb{R}^2$  est le *revêtement universel* du cylindre  $S^1 \times \mathbb{R}$ ), à condition de ne pas oublier que  $\theta$  n'est défini que modulo  $2\pi$ ; nous devons, après l'étude, effectuer le quotient de  $\mathbb{R}^2$  par la relation d'équivalence pour laquelle  $(\theta_1, \omega_1)$  est équivalent à  $(\theta_2, \omega_2)$  si  $\omega_1 = \omega_2$  et  $\theta_1 - \theta_2 = 2k\pi$ , avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

Les points d'équilibre sont les couples  $(\theta, \omega)$  pour lesquels  $\frac{d\theta}{dt} = 0$  et  $\frac{d\omega}{dt} = 0$ . Nous voyons que sur l'espace des phases vrai, c'est-à-dire sur le cylindre  $S^1 \times \mathbb{R}$ , il existe deux points d'équilibre, un point  $C$  de coordonnées  $\theta = 0$  modulo  $2\pi$ ,  $\omega = 0$ , et un point  $S$  de coordonnées  $\theta = \pi$  modulo  $2\pi$ ,  $\omega = 0$ . Sur son revêtement universel  $\mathbb{R}^2$ , chacun de ces points apparaît une infinité de fois; nous dirons que chaque point d'équilibre a une infinité de *représentants*; de sorte que nous avons pour points d'équilibre les représentants du point  $C$ , de coordonnées  $\theta = 2k\pi$ ,  $\omega = 0$  et les représentants du point  $S$ , de coordonnées  $\theta = (2k+1)\pi$ ,  $\omega = 0$ , avec  $k \in \mathbb{Z}$ . Sur la figure 3, qui représente le portrait de phases du système ayant pour ensemble des états le plan  $\mathbb{R}^2$ , revêtement universel de l'ensemble des états vrai  $S^1 \times \mathbb{R}$ , apparaissent trois représentants du point d'équilibre  $C$ , les points  $(\theta = -2\pi, \omega = 0)$ ,  $(\theta = 0, \omega = 0)$  et  $(\theta = 2\pi, \omega = 0)$ ; et deux représentants du point d'équilibre  $S$ , les points  $(\theta = -\pi, \omega = 0)$  et  $(\theta = \pi, \omega = 0)$ .

7. La masse  $m$  n'apparaît pas dans les équations du mouvement en raison d'une propriété physique importante, découverte par Galilée : l'égalité de la *masse inerte* et de la *masse pesante*. La recherche d'une explication de cette remarquable propriété a été une des motivations qui ont conduit Albert Einstein à formuler la théorie de la Relativité générale.

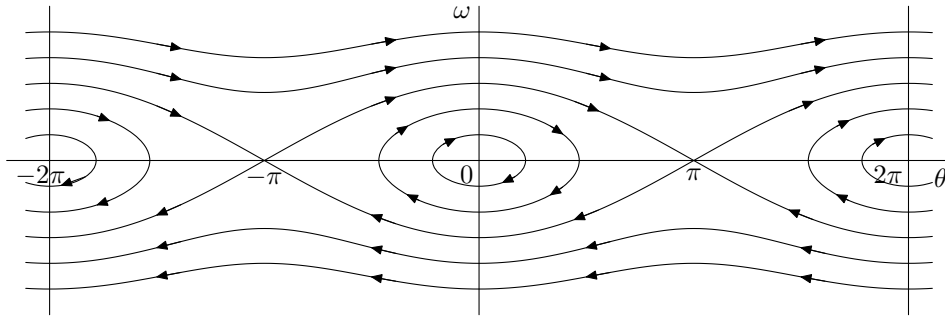


FIGURE 3 – Portrait de phases du pendule plan dans  $\mathbb{R}^2$

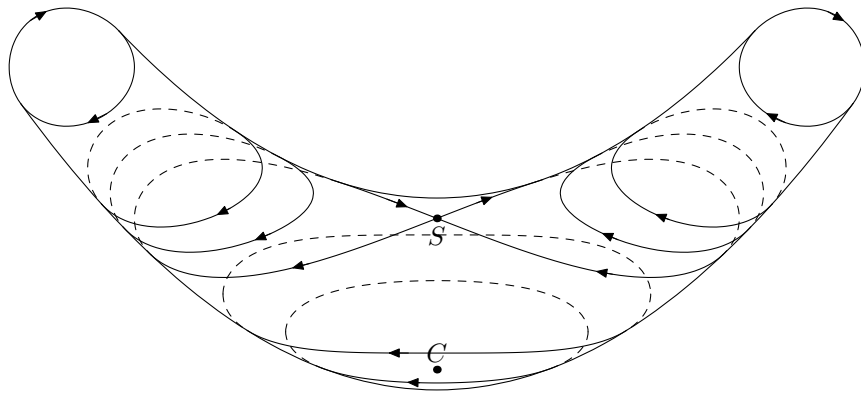


FIGURE 4 – Vue en perspective du portrait de phases du pendule plan

Soit  $H$  la fonction

$$H(\theta, \omega) = \frac{1}{2} ml^2 \omega^2 + mgl(1 - \cos \theta).$$

Elle a une signification physique importante : c'est l'*énergie totale* du pendule. Il est facile de vérifier qu'elle garde une valeur constante sur chaque orbite du système. On exprime ce fait en disant qu'en l'absence de frottement, le pendule est un système mécanique *conservatif* : chaque mouvement a lieu à énergie constante. On remarque que  $H$  admet un minimum strict, à la fois relatif et absolu, au point d'équilibre  $C$  ( $\theta = 0$  modulo  $2\pi$ ,  $\omega = 0$ ).

La figure 4 présente une vue en perspective du portrait de phases du vrai système, dont l'ensemble des états est un cylindre  $S^1 \times \mathbb{R}$ . Pour faire cette figure, nous avons plongé ce cylindre dans un espace de dimension 3 (le lecteur pourra penser à l'espace physique usuel) en le courbant ; la surface obtenue est difféomorphe à un cylindre, mais ses génératrices ne sont plus des lignes droites. La courbure donnée à cette surface a été choisie de telle sorte que les lignes d'énergie fixée, d'équation  $H(\theta, \omega) = \text{constante}$ , soient ses intersections avec des plans parallèles. La vue en perspective donnée sur la figure est une projection sur un plan de l'objet de l'espace à trois dimensions ainsi construit, la direction de projection étant choisie de manière que les projections des deux points d'équilibre  $C$  et  $S$  soient distinctes et bien visibles.

L'énergie  $H$  est constante sur chaque orbite, et toutes les orbites ont une énergie  $\geq 0$ , le minimum 0 étant atteint en un seul point, le point d'équilibre  $C$  ( $\theta = 0$  modulo  $2\pi$ ,  $\omega = 0$ ).

Outre les points d'équilibre, il n'existe que deux orbites non périodiques. La valeur de l'énergie sur ces orbites est  $2mgl$ , la même qu'au point d'équilibre haut  $S$ . Elles correspondent aux deux mouvements du pendule tendant vers le point d'équilibre haut lorsque le temps tend vers  $-\infty$  ou vers  $+\infty$ . Dans l'un de ces mouvements l'angle  $\theta$  croît en fonction du temps, dans l'autre il décroît. Ces deux orbites sont des arcs de courbe *ouverts* à leurs extrémités : elles tendent vers le point  $S$  à leurs deux extrémités, mais ne le contiennent pas. Sur les figures 3 et 4, elles sont représentées



par les deux arcs de courbe qui joignent les points  $(\theta = -\pi, \omega = 0)$  et  $(\theta = \pi, \omega = 0)$ , situés, l'un dans le demi-plan  $\omega > 0$ , l'autre dans le demi-plan  $\omega < 0$ . Elles sont dites *homoclines* (appellation due à Henri Poincaré), car chacune d'elles revient sur elle-même sous un certain angle non nul. Les ensembles  $\alpha$ - et  $\omega$ -limites des deux orbites homoclines sont confondus et ne contiennent qu'un seul élément, le point d'équilibre  $S$ .

Les orbites d'énergie  $h$  strictement comprise entre 0 et  $2mgl$  sont toutes périodiques. Lors du mouvement sur une orbite de ce type, l'angle  $\theta$  (en convenant de choisir sa détermination dans l'intervalle  $]-\pi, \pi[$ ) varie entre deux valeurs extrêmes opposées,  $-\theta_M(h)$  et  $\theta_M(h)$ , avec

$$\theta_M(h) = \arccos\left(1 - \frac{h}{mgl}\right).$$

Le pendule oscille autour de sa position d'équilibre stable (qui correspond au point d'équilibre  $C$ ).

Enfin les orbites d'énergie  $> 2mgl$  sont toutes périodiques,  $\omega$  restant de signe constant sur chacune d'elles ; lors des mouvements correspondants l'angle  $\theta$  varie de manière monotone (croissante si  $\omega > 0$  et décroissante si  $\omega < 0$ ). Lors de ces mouvements, le pendule tourne dans son plan et fait, au cours du temps, un nombre illimité de tours, dans le sens trigonométrique si  $\omega > 0$ , dans le sens inverse du sens trigonométrique si  $\omega < 0$ .

## Propriétés des ensembles limites et stabilité

Nous allons dans ce paragraphe considérer un système dynamique  $\{\Psi_\theta, \theta \in \Theta\}$  satisfaisant les hypothèses suivantes. S'il s'agit d'un système à temps discret ( $\Theta = \mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{N}$ ) nous supposons que l'ensemble  $\Omega$  de ses états est un espace topologique séparé et que son générateur est une application  $\Psi_1$  continue, définie sur une partie ouverte  $\Omega_1$  de  $\Omega$ , à valeurs dans  $\Omega$ . S'il s'agit d'un système à temps continu, nous supposons qu'il est différentiable, c'est-à-dire que l'ensemble  $\Omega$  de ses états est une variété indéfiniment différentiable et que son générateur infinitésimal est un champ de vecteurs indéfiniment différentiable  $X$  sur  $\Omega$ .

**Points d'équilibre.** Les plus simples des ensembles limites d'un tel système dynamique sont ses *points d'équilibre*. Il est facile de montrer qu'un point de  $\Omega$  est un point d'équilibre si et seulement si son générateur  $\Psi_1$  (si le système est à temps discret) ou son générateur infinitésimal  $X$  (si le système est à temps continu) est nul au point  $x$ . La trajectoire d'un point d'équilibre  $x$  est une application constamment égale à  $x$ , définie sur l'ensemble  $\Theta$  entier, et l'orbite de ce point n'a qu'un seul élément, le point  $x$ . Lest ensembles  $\alpha$ - et  $\omega$ -limites d'un point d'équilibre sont donc l'ensemble ne contenant qu'un seul élément, ce point lui-même.

Mais un point d'équilibre peut aussi être l'ensemble  $\alpha$ - ou  $\omega$ -limite de points autres que lui-même : le point d'équilibre haut du pendule plan en est un exemple. On montre en effet que si le système est à temps continu et si la trajectoire d'un élément  $x$  de  $\Omega$  qui n'est pas un point d'équilibre tend vers un point  $a$  de  $\Omega$  lorsque  $\theta$  tend vers l'extrémité droite (resp., gauche) de l'intervalle de temps sur lequel elle est définie, alors  $a$  est un point d'équilibre et l'extrémité droite (resp., gauche) de l'intervalle de temps sur lequel cette trajectoire est définie est  $+\infty$  (resp.,  $-\infty$ ). De même, on montre que si le système est à temps discret et si la trajectoire d'un point  $x$  de  $\Omega_1$  qui n'est pas un point d'équilibre est définie pour tous les éléments  $n \geq 0$  de  $\mathbb{N}$  (resp., pour tout élément  $n \leq 0$  de  $\mathbb{Z}$ ) et tend vers un point  $a$  de  $\Omega_1$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  (resp., de  $\Omega_{-1}$  lorsque  $n$  tend vers  $-\infty$ ), alors  $a$  est un point d'équilibre.

**Stabilité, attractivité, répulsivité.** Un point d'équilibre  $a$  est dit  *$\omega$ -stable* (resp.,  *$\alpha$ -stable*) au sens de Lyapunov si pour tout voisinage <sup>8</sup>  $V$  de  $a$  il existe un autre voisinage  $W$  de  $a$  dont tous les points ont une trajectoire définie et à valeurs dans  $V$  pour tout temps  $\theta \geq 0$  (resp., pour tout temps  $\theta \leq 0$ ).

---

8. Les lecteurs n'ayant pas étudié la topologie pourront penser à un voisinage du point  $a$  comme à une petite boule centrée sur ce point.

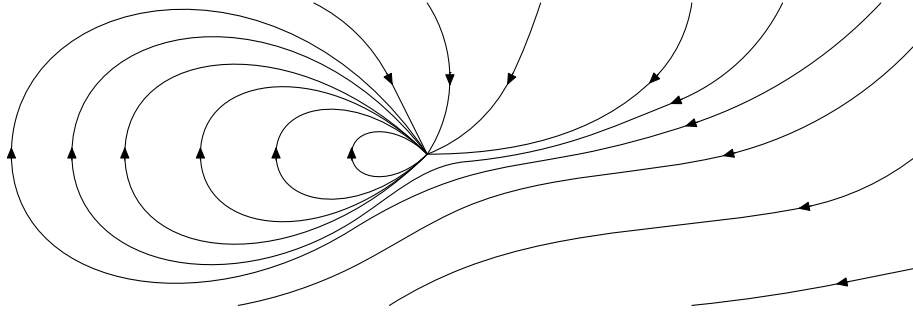


FIGURE 5 – Un exemple de point d'équilibre attractif mais non  $\omega$ -stable

Un point d'équilibre  $a$  est dit *attractif* ou *asymptotiquement  $\omega$ -stable* (resp., *répulsif* ou *asymptotiquement  $\alpha$ -stable*) s'il existe un voisinage  $W$  de  $a$  dont tous les points ont une trajectoire définie pour tout temps  $\theta \geq 0$  (resp., pour tout  $\theta \leq 0$ ) qui tend vers  $a$  lorsque le temps  $\theta$  tend vers  $+\infty$  (resp., vers  $-\infty$ ).

Un point d'équilibre peut très bien être  $\omega$ -stable (resp.,  $\alpha$ -stable) sans être attractif (resp., répulsif). Le point d'équilibre bas du pendule plan, dont les figures 3 et 4 représentent le portrait de phases, est à la fois  $\alpha$ -stable et  $\omega$ -stable, mais n'est ni attractif ni répulsif, puisque les orbites des points voisins sont périodiques, tournent autour de ce point sans jamais tendre vers lui.

Réciproquement, très souvent, un point d'équilibre attractif (resp., répulsif)  $a$  est aussi  $\omega$ -stable (resp.,  $\alpha$ -stable) au sens de Lyapunov. Mais ce n'est pas toujours vrai : il peut arriver que tout voisinage de  $a$  contienne des points dont la trajectoire, lorsque le temps croît (resp., décroît), s'éloigne d'abord très loin de  $a$ , puis tend vers ce point lorsque le temps tend vers  $+\infty$  (resp., vers  $-\infty$ ). La figure 5 donne un exemple de ce type de comportement.

Un important théorème dû à Alexandr Mikhailovich Lyapunov (1857-1918), qui généralise le théorème de Lejeune-Dirichlet bien connu des Mécaniciens, indique des conditions suffisantes pour assurer la stabilité ou l'attractivité d'un point d'équilibre. En voici l'énoncé.

**Théorème de Lyapunov.** Soit  $a$  un point d'équilibre d'un système dynamique vérifiant les hypothèses énoncées au début de ce paragraphe. S'il existe une fonction continue  $f$ , à valeurs réelles, définie sur un voisinage ouvert  $V$  du point  $a$  et admettant en ce point un minimum strict, satisfaisant de plus la condition (qui prend une forme un peu différente selon que le système est à temps discret ou à temps continu)

- si le système est à temps discret,  $f(\Psi_1(x)) \leq f(x)$  (resp.,  $f(\Psi_1(x)) < f(x)$ ) pour tout point  $x$  de  $V$  distinct de  $a$  tel que  $\Psi_1(x)$  soit élément de  $V$ ,  $\Psi_1$  désignant le générateur du système ;
- si le système est à temps continu,  $f$  est supposée différentiable sur  $V$ , sauf peut-être au point  $a$ , et telle que sa dérivée dans la direction du champ de vecteurs  $X$  (générateur infinitésimal du système) prenne en tout point de  $V$  distinct de  $a$  une valeur  $\leq 0$  (resp, une valeur  $< 0$ )

Alors le point d'équilibre  $a$  est  $\omega$ -stable au sens de Lyapunov (resp., à la fois attractif et  $\omega$ -stable au sens de Lyapunov).

On peut bien sûr donner un énoncé analogue indiquant des conditions suffisantes pour assurer l' $\alpha$ -stabilité ou la répulsivité d'un point d'équilibre.

La description qualitative du portrait de phases d'un système dynamique comporte la détermination de l'ensemble des points dont l'ensemble  $\omega$ -limite (ou  $\alpha$ -limite) est spécifié. Cela justifie la définition suivante

**Définition.** On appelle *bassin d'attraction* (resp., *bassin de répulsion*) d'un point d'équilibre  $a$  l'ensemble des points  $x$  de  $\Omega$  dont l'ensemble  $\omega$ -limite  $L_\omega(x)$  (resp., l'ensemble  $\alpha$ -limite  $L_\alpha(x)$ ) est le singleton  $\{a\}$  (ensemble ayant  $a$  pour seul élément).

Il existe des variantes du théorème de Lyapunov permettant de prouver qu'une partie donnée de  $\Omega$  est contenue dans le bassin d'attraction (ou de répulsion) d'un point d'équilibre.

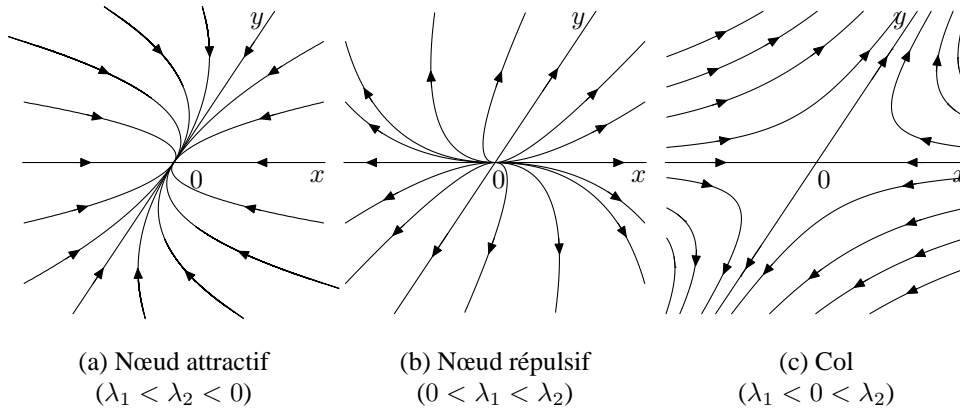


FIGURE 6 – Cas où les valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont réelles et distinctes

## Description locale du flot réduit d'un champ de vecteurs

Nous considérons dans ce paragraphe un champ de vecteurs indéfiniment différentiable  $X$  défini sur une variété indéfiniment différentiable  $\Omega$  de dimension  $n$ . Nous avons vu plus haut que son flot réduit est un système dynamique différentiable  $\{\Psi_t, t \in \mathbb{R}\}$ , à temps continu, ayant  $X$  pour générateur infinitésimal. Nous allons étudier l'allure locale, au voisinage d'un point particulier  $a$  de  $\Omega$ , du portrait de phases de ce système.

Il existe un théorème, dit *du redressement local* du champ de vecteurs, montrant que lorsque la valeur  $X(a)$  du champ de vecteurs  $X$  au point  $a$  est non nulle, l'allure locale du portrait de phases au voisinage de  $a$  est très simple. Ce théorème affirme en effet l'existence, sur un voisinage  $U$  du point  $a$ , d'un système de coordonnées locales  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  dans lequel le champ de vecteurs  $X$  n'a qu'une seule composante non nulle, sa composante sur l'axe des  $x_1$ <sup>9</sup>, et que cette composante est constante, égale à 1. Le flot réduit du champ de vecteurs est donc très simple ; il fait correspondre à un point de  $U$  de coordonnées  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  et à un intervalle de temps  $t$  assez petit pour que la trajectoire de ce point ne sorte pas de  $U$ , le point de coordonnées  $(x_1 + t, x_2, x_3, \dots, x_n)$ . À l'intérieur de  $U$ , les orbites du système sont représentées<sup>10</sup> par des segments de droite parallèles à l'axe des  $x_1$ .

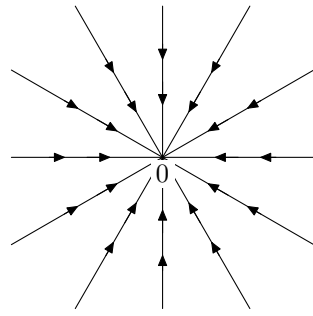
Les choses se compliquent lorsque  $X(a) = 0$ , c'est-à-dire lorsque  $a$  est un point d'équilibre. Nous allons d'abord décrire ce qui se passe lorsque  $\Omega$  est un plan et que  $X$  est un champ de vecteurs linéaire.

**Portrait de phases d'un champs de vecteurs linéaires sur un plan.** Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension 2 et  $A$  une application linéaire injective de  $E$  dans lui-même. Le choix d'une base permet d'identifier  $E$  à  $\mathbb{R}^2$  et  $A$  à une matrice  $2 \times 2$  de déterminant non nul. L'application  $A$  peut être considérée comme un champ de vecteurs sur  $E$  dont la valeur, en un point  $x$  de  $E$ , est le vecteur  $A(x)$ . Puisque  $A(x) = 0$  si et seulement si  $x = 0$ , ce champ de vecteurs n'a qu'un seul point d'équilibre, l'origine de  $E$ . L'allure qualitative du portrait de phases de ce champ de vecteurs dépend des propriétés des valeurs propres et vecteurs propres de  $A$ .

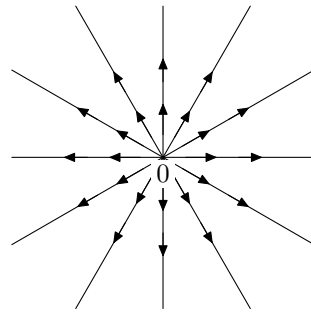
Les figures 6 représentent l'allure du portrait de phases lorsque les deux valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  de  $A$  sont réelles et distinctes. À gauche est représenté le cas où elles sont toutes deux négatives ; l'origine est alors un point d'équilibre  $\omega$ -stable et attractif ; on dit que c'est un *nœud attractif* ou *puits*. Au centre est représenté le cas où elles sont toutes deux positives ; l'origine est alors un point d'équilibre  $\alpha$ -stable et répulsif ; on dit que c'est un *nœud répulsif* ou *source*. Enfin à droite est représenté le cas où les deux valeurs propres sont de signes contraires ; l'origine

9. Nous identifions ici  $U$  à une partie de  $\mathbb{R}^n$ , précisément au moyen de ces coordonnées locales, ce qui permet de parler de *composantes* du champ de vecteurs  $X$  et d'*axe des  $x_1$* .

10. Ici encore nous identifions  $U$  à une partie de  $\mathbb{R}^n$ .

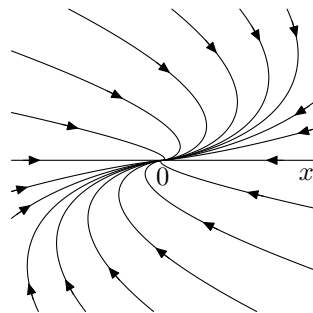


Nœud attractif ( $A = \lambda \text{id}_E$ , avec  $\lambda < 0$ )

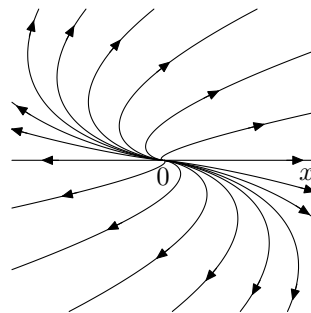


Nœud répulsif ( $A = \lambda \text{id}_E$ , avec  $\lambda > 0$ )

FIGURE 7 – Cas où  $A = \lambda \text{id}_E$ ,  $\lambda \neq 0$



Nœud attractif ( $\lambda < 0$ )



Nœud répulsif ( $\lambda < 0$ )

FIGURE 8 – Cas où  $A$  possède une valeur propre double réelle avec une seule direction propre

n'est ni stable ni instable ; on dit que c'est un *col*. Dans les trois cas, on remarque l'existence de quatre orbites rectilignes qui ont pour ensemble  $\alpha$ -limite ou  $\omega$ -limite le singleton origine. Leurs directions sont celles des vecteurs propres de  $A$ .

Les figures 7 représentent l'allure du portrait de phases lorsque  $A$  possède une valeur propre réelle double  $\lambda \neq 0$  et que  $E$  possède une base de vecteurs propres ; en d'autres termes,  $A$  est dans ce cas égal à  $\lambda$  fois l'application identique de  $E$ . À gauche est représenté le cas où  $\lambda < 0$  ; l'origine est alors un point d'équilibre  $\omega$ -stable et attractif ; on dit encore que c'est un *nœud attractif* ou *puits*. À droite est représenté le cas où  $\lambda > 0$  ; l'origine est  $\alpha$ -stable et répulsif ; on dit encore que c'est un *nœud répulsif* ou *source*. Dans les deux cas, toutes les orbites (autres que le point d'équilibre) sont rectilignes et admettent le singleton origine pour ensemble  $\omega$ -limite (si  $\lambda < 0$ ) ou  $\alpha$ -limite (si  $\lambda > 0$ ).

Les figures 8 représentent l'allure du portrait de phases lorsque  $A$  possède une valeur propre réelle double  $\lambda \neq 0$  et que  $E$  ne possède qu'une seule direction propre. À gauche est représenté le cas où  $\lambda < 0$  ; l'origine est alors un point d'équilibre  $\omega$ -stable et attractif ; on dit que c'est un *nœud impropre attractif*, ou *puits impropre*. À droite est représenté le cas où  $\lambda > 0$  ; l'origine est  $\alpha$ -stable et répulsif ; on dit que c'est un *nœud impropre répulsif* ou *source impropre*. Dans chacun des deux cas, il n'y a que deux orbites rectilignes, qui admettent le singleton origine pour ensemble  $\omega$ -limite (si  $\lambda < 0$ ) ou  $\alpha$ -limite (si  $\lambda > 0$ ). Ces orbites sont parallèles à la direction propre de  $A$ .

Les figures 9 représentent l'allure du portrait de phases lorsque  $A$  possède deux valeurs propres complexes conjuguées  $\alpha \pm i\beta$ , avec  $\beta > 0$ . Il n'existe alors pas de direction propre réelle (donc pas d'orbite rectiligne). À gauche est représenté le cas où  $\alpha < 0$  ; l'origine est alors un point d'équilibre  $\omega$ -stable et attractif ; on dit que c'est un *foyer attractif* ; les orbites autres que le point d'équilibre sont des spirales qui s'enroulent autour de ce point, en tendant vers lui lorsque le

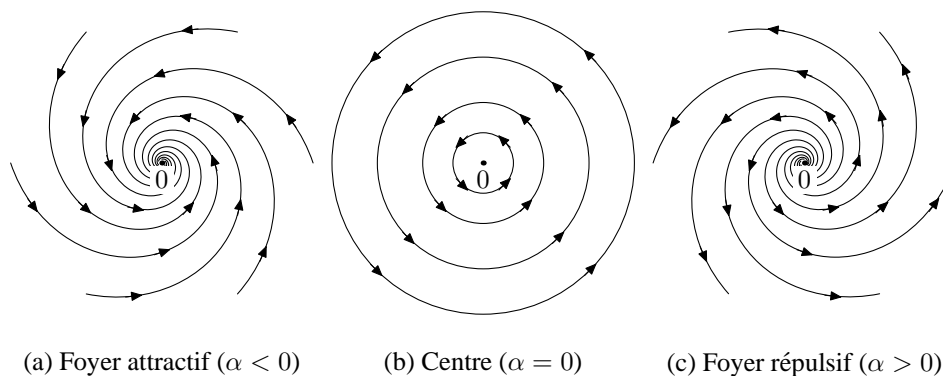


FIGURE 9 – Cas où les valeurs propres  $\alpha \pm i\beta$  de  $A$  sont complexes conjuguées, avec  $\beta > 0$

temps tend vers  $+\infty$ . Au centre est représenté le cas où  $\alpha = 0$ , c'est-à-dire où les valeurs propres sont imaginaires pures ; les orbites autres que le point d'équilibre sont toutes périodiques, elles entourent le point d'équilibre, qui est à la fois  $\omega$ -stable et  $\alpha$ -stable, mais n'est ni attractif ni répulsif ; on dit que c'est un *centre*. À droite est représenté le cas où  $\alpha > 0$  ; l'origine est alors  $\alpha$ -stable et répulsif ; on dit que c'est un *foyer répulsif* ; les orbites autres que le point d'équilibre sont des spirales qui s'enroulent autour de ce point, en tendant vers lui lorsque le temps tend vers  $-\infty$ .

**Généralisation.** Les figures 5 à 9 donnent une idée assez précise de l'allure qualitative du portrait de phases d'un champ de vecteurs linéaire sur un espace vectoriel de dimension 2, au voisinage de son point d'équilibre. Que subsiste-t-il de cette allure qualitative, lorsqu'on ne suppose plus le champ linéaire, et lorsque ce champ est défini sur une variété de dimension finie quelconque ? Dans [12, 13, 14, 15], Henri Poincaré (à qui on doit les noms *nœud*, *col*, *foyer* et *centre* donnés aux points d'équilibre d'un champ de vecteurs sur une variété de dimension 2) a, dans une très large mesure, répondu à cette question.

Considérons donc un champ de vecteurs indéfiniment différentiable  $X$ , défini sur une variété indéfiniment différentiable  $\Omega$  de dimension  $n$ . Au voisinage d'un point d'équilibre, c'est-à-dire d'un point  $a$  de  $\Omega$  tel que  $X(a) = 0$ , on peut développer  $X$  en série de Taylor ; le terme de degré 0 est la valeur de  $X$  au point  $a$  ; il est donc nul. Le terme de degré 1 est la différentielle  $A = DX(a)$  du champ  $X$  au point  $a$  ; c'est une application linéaire de l'espace vectoriel tangent à la variété  $\Omega$  au point  $a$  dans lui-même, qu'on peut considérer comme un champ de vecteurs linéaire sur cet espace tangent. On peut étudier le portrait de phases de  $A$ , et se demander si son allure qualitative ressemble à celle du vrai champ de vecteurs  $X$  au voisinage de  $a$ . Voici quelques résultats.

1. Si la partie réelle de toutes les valeurs propres de  $A$  est strictement négative (resp., strictement positive), le point  $a$  est  $\omega$ -stable et attractif (resp.,  $\alpha$ -stable et répulsif). C'est une conséquence assez facile du théorème de Lyapunov.
2. Si l'application linéaire  $A = DX(a)$  est inversible (on dit alors que  $a$  est un point d'équilibre *non dégénéré*), si une trajectoire du champ de vecteurs  $X$  tend vers  $a$  lorsque le temps  $t$  tend vers  $+\infty$  (resp., vers  $-\infty$ ) et admet, en ce point, une demi-droite tangente de vecteur directeur  $e \neq 0$ , ce vecteur est un vecteur propre de  $A$  associé à une valeur propre réelle strictement négative (resp., positive).
3. Si toutes les valeurs propres de  $A$  ont une partie réelle non nulle (on dit alors que  $a$  est un point d'équilibre *hyperbolique*), l'espace tangent à  $\Omega$  au point  $a$  se décompose en somme directe de deux sous-espaces, tous deux invariants par l'application  $A$  (ce qui signifie que  $A$  applique chacun d'eux dans lui-même), la restriction de  $A$  à l'un de ces sous-espaces (dit *stable*) ayant pour valeurs propres les valeurs propres de  $A$  dont la partie réelle est négative, et la restriction de  $A$  à l'autre sous-espace (dit *instable*) ayant pour valeurs propres les valeurs propres de  $A$  dont la partie réelle est positive. Pour le flot réduit de  $X$ , le bassin d'attraction (resp., de répulsion) du point  $a$ ,

c'est-à-dire l'ensemble des points ayant le singleton  $\{a\}$  pour ensemble  $\omega$ -limite (resp.,  $\alpha$ -limite) est une sous-variété différentielle <sup>11</sup> immergée <sup>12</sup> de  $\Omega$ , passant par le point  $a$  et ayant en ce point pour espace tangent le sous-espace stable (resp., instable) de l'espace tangent à  $\Omega$  au point  $a$ . On l'appelle *variété stable* (resp., *variété instable*) du point d'équilibre  $a$ . Sa dimension est égale au nombre de valeurs propres de  $A$  dont la partie réelle est négative (resp., positive), chacune étant comptée un nombre de fois égal à sa multiplicité. L'orbite d'un point quelconque de la variété stable (resp., instable) est entièrement contenue dans cette variété.

Ainsi par exemple, le point d'équilibre instable du pendule plan, désigné par  $S$  sur la figure 4, est hyperbolique ; ses variétés stable et instable sont confondues, et sont la courbe en forme de lemniscate ayant  $S$  pour point double, réunion du point  $S$  et des orbites ayant le singleton  $\{S\}$  pour ensemble limite.

De même, les points d'équilibre des champs de vecteurs linéaires dont les portraits de phase sont représentés sur les figures 6, 7, 8 et 9 sont hyperboliques, sauf le centre (figure 9 (b)). La variété stable des nœuds attractifs et du foyer attractif (resp., des nœuds répulsifs et du foyer répulsif) est le plan entier (resp., le singleton  $\{0\}$ ), tandis que la variété instable de ces points est le singleton  $\{0\}$  (resp., le plan entier). Les sous-variétés stable (resp., instable) du col (figure 6 (c)) sont les droites réunion du point 0 et des orbites ayant le singleton  $\{0\}$  pour ensemble  $\omega$ -limite (resp.,  $\alpha$ -limite).

4. Sous les mêmes hypothèses que ci-dessus, c'est-à-dire lorsque le point d'équilibre  $a$  est hyperbolique, les flots réduits du champ de vecteurs  $X$  au voisinage du point d'équilibre  $a$  et de son linéarisé  $A = DX(a)$  au voisinage de l'origine sont topologiquement conjugués : c'est le *théorème de Hartmann et Grobman*. Cela signifie qu'il existe une application bijective d'un voisinage de  $a$  dans  $\Omega$  sur un voisinage de l'origine de l'espace tangent en  $a$  à  $\Omega$ , continue ainsi que son inverse, mettant ces flots réduits en correspondance. Cette application n'est en général pas différentiable. Il existe cependant des cas où, moyennant des hypothèses (dites de *non résonance*) assez compliquées, on peut montrer qu'elle est différentiable ainsi que son inverse ; il existe notamment un *théorème de Sternberg* qui donne un résultat de ce type.

5. Des résultats analogues existent pour les systèmes dynamiques à temps discret dont l'ensemble des états est une variété différentiable  $\Omega$  et dont le générateur  $\Gamma_1$  est un difféomorphisme <sup>13</sup>. La notion de point d'équilibre hyperbolique prend, pour ces systèmes, la forme suivante : un point d'équilibre  $a$  est dit *hyperbolique* si la différentielle de  $\Gamma_1$  au point  $a$  est une application linéaire (de l'espace tangent en  $a$  à  $\Omega$  dans lui-même) dont toutes les valeurs propres sont de module  $\neq 1$ . On peut, pour ces systèmes, prouver l'existence des variétés stable et instable, ainsi qu'une forme du théorème de Hartmann et Grobman et du théorème de Sternberg.

6. Pour les points d'équilibre non hyperboliques, on peut définir la notion de *variété centrale* ; nous le ferons par exemple pour le flot réduit d'un champ de vecteurs indéfiniment différentiable (mais l'adaptation au cas d'un système dynamique différentiable à temps discret est aisée). Soit  $a$  un point d'équilibre et  $E$  le plus grand sous-espace vectoriel de l'espace tangent en  $a$  à  $\Omega$  invariant par la différentielle  $A = DX(a)$  du champ de vecteurs  $X$  en  $a$  (c'est-à-dire que  $A$  applique dans lui-même), et tel que les valeurs propres de la restriction de  $A$  à ce sous-espace aient toutes leur partie réelle nulle. Il existe alors une sous-variété immergée de  $\Omega$ , passant par le point  $a$  et ayant en ce point  $E$  pour espace tangent, invariante par le flot réduit de  $X$  (c'est-à-dire telle que l'orbite de chacun de ses points soit entièrement contenue dans cette sous-variété). On dit que c'est une

11. La notion de sous-variété différentielle d'une variété de dimension  $n$  généralise celle de surface lisse, admettant en tout point un plan tangent, de l'espace usuel de dimension 3.

12. La notion de sous-variété immergée est un peu plus générale que celle de sous-variété au sens usuel. Une sous-variété immergée peut se recouper, comporter des points ayant plusieurs espaces tangents. Par exemple, une lemniscate est une sous-variété immergée du plan, non une sous-variété au sens usuel, à cause de l'existence du point double ; en ce point elle possède deux tangentes distinctes.

13. C'est-à-dire une application bijective d'un ouvert  $\Omega_1$  de  $\Omega$  sur un autre ouvert  $\Omega_{-1}$  de cette variété, continue et indéfiniment différentiable ainsi que son inverse.

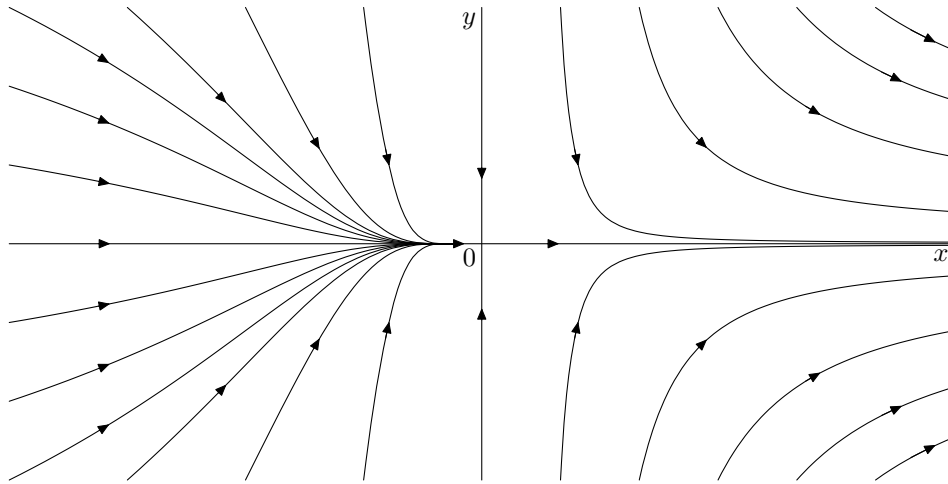


FIGURE 10 – Point d'équilibre non hyperbolique ayant une infinité de variétés centrales

*sous-variété centrale* du point d'équilibre  $a$ .

La notion de variété centrale est moins intéressante que celles de variété stable ou instable, car il n'y a pas unicité : un point d'équilibre peut très bien avoir une infinité de variétés centrales distinctes. C'est le cas, par exemple, du point d'équilibre du champ de vecteurs dont le flot est représenté sur la figure 10 : les variétés centrales de l'origine, de dimension 1, sont formées par n'importe quelle orbite contenue dans le demi-plan  $x < 0$  prolongée par le demi-axe des  $x$  pour  $x \geq 0$ .

Les variétés centrales du centre, pour le champ de vecteurs linéaire dont le portrait de phases est représenté sur la figure 9 (b), sont tous les disques ouverts du plan centrés sur l'origine.

## Orbites périodiques

Après les points d'équilibre, les orbites périodiques sont les objets remarquables les plus simples du portrait de phases d'un système dynamique. L'étude des orbites périodiques d'un système à temps discret se ramène immédiatement à celle des points d'équilibre ; en effet les orbites périodiques de période  $n$  d'un système à temps discret de générateur  $\Gamma_1$  sont les points d'équilibre du système de générateur  $\Gamma_n$ ,  $n$ -ième itérée de  $\Gamma_1$ . C'est pourquoi nous nous intéresserons aux orbites périodiques d'un système à temps continu  $\{\Gamma_t, t \in \mathbb{R}\}$  dont le générateur est un champ de vecteurs  $X$  indéfiniment différentiable sur une variété  $\Omega$  de dimension  $n$ .

### L'application de premier retour de Poincaré

Henri Poincaré a montré que les orbites périodiques sont, en Mécanique céleste, un puissant moyen d'étude. Dand [13], il fut le premier à définir une application extrêmement utile pour l'étude des orbites de points voisins d'une orbite périodique, qui aujourd'hui porte son nom. Voici comment on la définit. En un point  $a$  d'une orbite périodique  $\mathcal{O}$ , considérons une sous-variété  $\mathcal{P}^{14}$  passant par  $a$  transverse à  $X(a)$ , c'est-à-dire non tangente à ce vecteur (voir figure 11). On peut alors choisir un voisinage ouvert  $U$  de  $a$  dans  $\mathcal{P}$  tel que la trajectoire de chaque point  $x$  de ce voisinage recoupe transversalement pour la première fois, pour un temps strictement positif, la sous-variété  $\mathcal{P}$  ; on note  $g(x)$  ce point. Ainsi définie,  $g$  est l'*application de premier retour de Poincaré*. En choisissant  $U$  convenablement on peut faire en sorte qu'elle soit bijective de  $U$  sur son image  $g(U)$ , indéfiniment différentiable ainsi que son inverse. Elle est donc le générateur d'un système dynamique à temps discret différentiable  $\{g_n, n \in \mathbb{Z}\}$  sur  $\mathcal{P}$ , qui admet le point  $a$  pour point d'équilibre.

14. Lorsque  $\Omega$  est un espace affine de dimension 3 (resp.,  $n$ ) on peut prendre pour  $\mathcal{P}$  un plan (resp., un hyperplan de dimension  $n - 1$ ) contenant  $a$  et non tangent au vecteur  $X(a)$ .

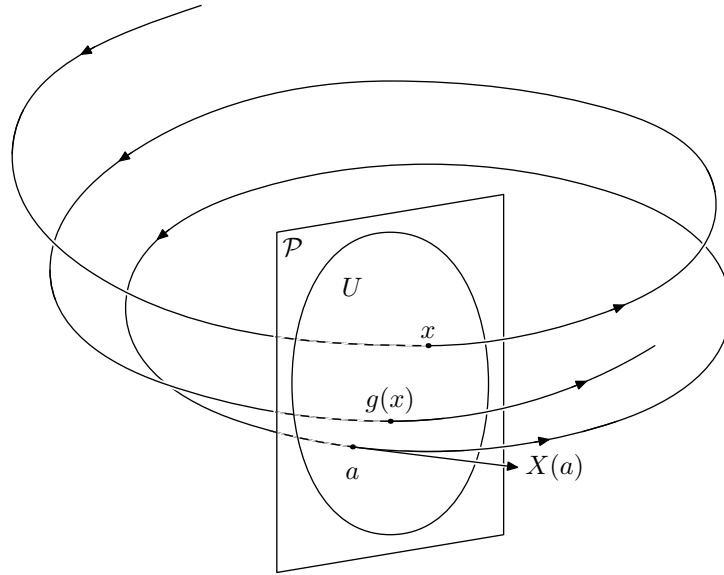


FIGURE 11 – Application de premier retour de Poincaré

On peut même utiliser, au lieu du champ de vecteurs  $X$  lui-même, un champ de vecteurs plus simple mais assez voisin, dont les orbites périodiques sont plus faciles à déterminer. Poincaré l'a d'ailleurs fait pour l'étude du problème des trois corps.

Les propriétés des orbites du champ de vecteurs  $X$  voisines de l'orbite périodique  $\mathcal{O}$  sont très étroitement liées à celles du système dynamique à temps discret  $\{g_n, n \in \mathbb{Z}\}$  au voisinage du point d'équilibre  $a$ . Nous en indiquons ci-dessous quelques unes.

1. La recherche d'orbites périodiques de  $X$  voisines de l'orbite  $\mathcal{O}$  se ramène à la recherche de points d'équilibre ou, plus généralement, de points périodiques du système à temps discret  $\{g_n, n \in \mathbb{Z}\}$ , voisins de  $a$ .
2. Les notions de  $\alpha$ - et de  $\omega$ -stabilité au sens de Lyapunov ainsi que celles d'attractivité et de répulsivité, déjà définies ci-dessus pour les points d'équilibre, s'adaptent aisément au cas des orbites périodiques, et on montre que l'orbite périodique  $\mathcal{O}$  est  $\alpha$ -stable au sens de Lyapunov (resp.,  $\omega$ -stable au sens de Lyapunov, resp., attractive, resp., répulsive) si et seulement si  $a$ , considéré comme point d'équilibre du système à temps discret  $\{g_n, n \in \mathbb{Z}\}$ , possède la propriété du même nom (ce qui ne dépend pas du choix de  $a$  sur  $\mathcal{O}$ , ni du choix de la sous-variété  $\mathcal{P}$ ).
3. Lorsque  $a$  est un point d'équilibre hyperbolique du système à temps discret  $\{g_n, n \in \mathbb{Z}\}$  (propriété qui ne dépend pas du choix du point  $a$  sur cette orbite, ni du choix de la sous-variété  $\mathcal{P}$ ), on dit que  $\mathcal{O}$  est une *orbite périodique hyperbolique*. Son *bassin d'attraction* (resp., *de répulsion*), c'est-à-dire l'ensemble des points de  $\Omega$  ayant l'orbite  $\mathcal{O}$  pour ensemble  $\omega$ -limite (resp.,  $\alpha$ -limite) est une sous-variété immergée de  $\Omega$  contenant  $\mathcal{O}$ , dont la dimension est égale à celle de la variété stable (resp., instable) du point d'équilibre  $a$  pour le système à temps discret  $\{g_n, n \in \mathbb{Z}\}$ , plus une unité. On l'appelle *variété stable* (resp., *instable*) de l'orbite périodique  $\mathcal{O}$ . Elle est invariante par le flot réduit de  $X$ , ce qui signifie qu'elle contient l'orbite de chacun de ses points. Elle est réunion de toutes les orbites de  $X$  qui rencontrent la variété stable (resp., instable) de  $a$  considéré comme point d'équilibre du système à temps discret  $\{g_n, n \in \mathbb{Z}\}$ .

Une orbite périodique  $\omega$ -stable et attractive (resp.,  $\alpha$ -stable et répulsive) est appelée *cycle  $\omega$ -limite* (resp., *cycle  $\alpha$ -limite*).

La notion de cycle limite a été découverte par Henri Poincaré, qui en a parfaitement compris l'intérêt pour les applications en radioélectricité et en automatique (voir à ce propos le bel article de Jean-Marc Ginoux [5] dans le même numéro). Nous en donnerons plus loin un exemple (équation de Van der Pol).



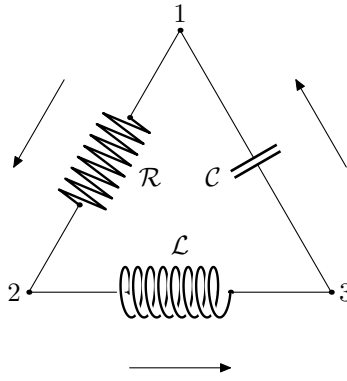


FIGURE 12 – Circuit électrique avec résistance, self et capacité

**Le théorème de Poincaré-Bendixson.** Ce résultat, annoncé par Henri Poincaré et démontré en 1901 par le mathématicien suédois Ivar Bendixson (1861-1935), affirme que l'ensemble  $\omega$ -limite  $L_\omega(x)$  (resp., l'ensemble  $\alpha$ -limite  $L_\alpha(x)$ ) d'un point quelconque  $x$ , pour le système dynamique ayant pour générateur un champ de vecteurs indéfiniment différentiable défini sur un ouvert d'un plan (espace affine de dimension 2), s'il est compact<sup>15</sup> et ne contient aucun point d'équilibre, est une orbite périodique. Cela exclut l'existence, pour les champs de vecteurs définis sur une partie bornée d'un plan, d'ensembles limites très compliqués donnant lieu à un comportement en apparence chaotique des orbites dont elles sont l'ensemble limite.

Par contre, sur un espace de dimension supérieure ou égale à 3 il existe des champs de vecteurs dont le flot réduit a des ensembles limites extrêmement compliqués. Le météorologue Edward Lorenz en a donné un exemple en 1972 [9].

#### L'équation de Van der Pol.

Considérons un circuit électrique comportant une résistance  $\mathcal{R}$ , une self  $\mathcal{L}$  et un condensateur  $\mathcal{C}$ , disposés en triangle (figure 12). On note 1, 2 et 3 les sommets du triangle. La résistance est placée sur le côté 1–2, la self sur le côté 2–3 et le condensateur sur le côté 3–1. Choisissons un sens positif sur chaque côté, par exemple de 1 vers 2, de 2 vers 3 et de 3 vers 1, représentés par des flèches sur la figure 12. Notons  $i_{\mathcal{R}}$ ,  $i_{\mathcal{L}}$  et  $i_{\mathcal{C}}$  l'intensité (comptée algébriquement) du courant électrique, à l'instant considéré, dans la branche du circuit contenant la résistance, la self et la capacité, respectivement.

La première loi de Kirchoff, qui exprime qu'il n'y a pas accumulation de charge électrique aux sommets du triangle, nous donne les relations

$$i_{\mathcal{R}} = i_{\mathcal{L}} = i_{\mathcal{C}} = i.$$

Notons  $V_1$ ,  $V_2$  et  $V_3$  le potentiel électrique aux sommets 1, 2 et 3, respectivement. Écrivons les équations qui lient l'intensité du courant qui passe dans chaque branche du circuit à la différence de potentiel entre les deux extrémités de cette branche. Pour la branche 1–2, cette relation est la *loi d'Ohm*. Nous l'écrivons sous la forme

$$V_1 - V_2 = g(i_{\mathcal{R}}),$$

où  $g$  est une fonction d'une variable réelle, car nous voulons pouvoir traiter le cas où la résistance  $\mathcal{R}$  est non linéaire, et même (avec une fonction  $g$  pouvant prendre des valeurs négatives) celui où cette résistance est en fait un générateur de courant électrique.

Pour la branche 2–3, cette relation est la *loi de Faraday*. Elle s'écrit

$$L \frac{di_{\mathcal{L}}}{d\theta} = V_2 - V_3,$$

15. Une partie d'un plan est compacte si elle est fermée et bornée. Étant toujours fermé, un ensemble limite est compact si et seulement s'il est borné.

où  $L$  est une constante strictement positive appelée *inductance* de la self  $\mathcal{L}$ , et où  $\theta$  désigne le temps.

Pour la branche 3–1, cette relation est la *loi de la capacité*,

$$i_e = C \frac{d(V_3 - V_1)}{d\theta},$$

où  $C$  est une constante strictement positive, la *capacité* du condensateur  $\mathcal{C}$ .

Posons

$$W = V_1 - V_3.$$

La première loi de Kirchhoff, la loi de Faraday et la loi d'Ohm nous permettent d'écrire

$$L \frac{di}{d\theta} = V_2 - V_3 = V_2 - V_1 + V_1 - V_3 = W - g(i).$$

De même, la loi de la capacité et la première loi de Kirchhoff nous permettent d'écrire

$$C \frac{dW}{dt} = -i.$$

Nous avons donc obtenu, pour le couple de fonctions  $(i, W)$ , le système différentiel

$$\begin{cases} L \frac{di}{d\theta} = W - g(i), \\ C \frac{dW}{d\theta} = -i. \end{cases}$$

Posons

$$x = \sqrt{L}i, \quad y = \sqrt{C}W, \quad t = \frac{\theta}{\sqrt{LC}},$$

et désignons par  $f$  la fonction, d'une variable réelle  $x$ ,

$$f(x) = \sqrt{C}g\left(\frac{x}{\sqrt{L}}\right).$$

Moyennant ce changement de fonctions inconnues ( $x$  et  $y$  au lieu de  $i$  et  $W$ ) et ce changement d'unité de temps (mesuré maintenant par  $t$  au lieu de  $\theta$ ), le système différentiel ci-dessus devient

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - f(x), \\ \frac{dy}{dt} = -x. \end{cases}$$

C'est une équation différentielle dans  $\mathbb{R}^2$  appelée *équation de Liénard*, en hommage au physicien français Alfred-Marie Liénard (1869–1958).

Dans le cas particulier où

$$f(x) = x^3 - x,$$

l'équation de Liénard est appelée *équation de van der Pol* en hommage au physicien néerlandais Balthasar van der Pol (1889–1959). Son portrait de phases est représenté sur la figure 13. Il comporte un point d'équilibre instable et répulsif, l'origine 0, et un cycle limite attractif entourant 0.

### Intersections de variétés stables et instables

Lorsqu'un champ de vecteurs comporte un ou plusieurs points d'équilibre hyperboliques, ou bien une ou plusieurs orbites périodiques hyperboliques, dont les variétés stable et instable se rencontrent sans être tangentes en leur point de rencontre, le portrait de phases du système peut

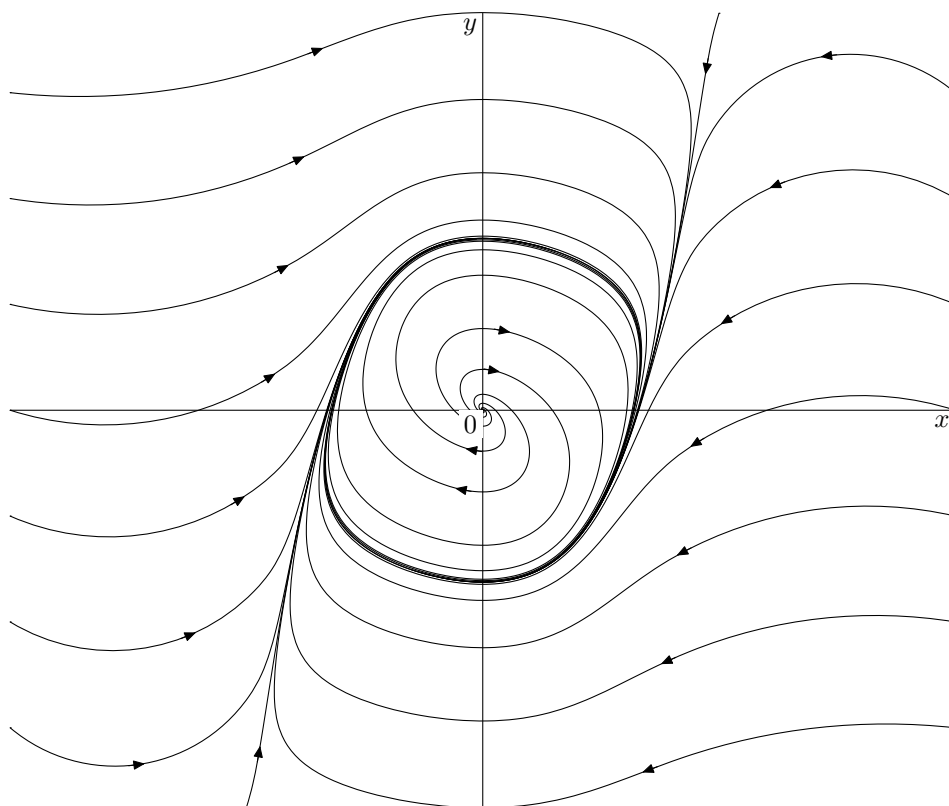


FIGURE 13 – Portrait de phases de l'équation de van der Pol

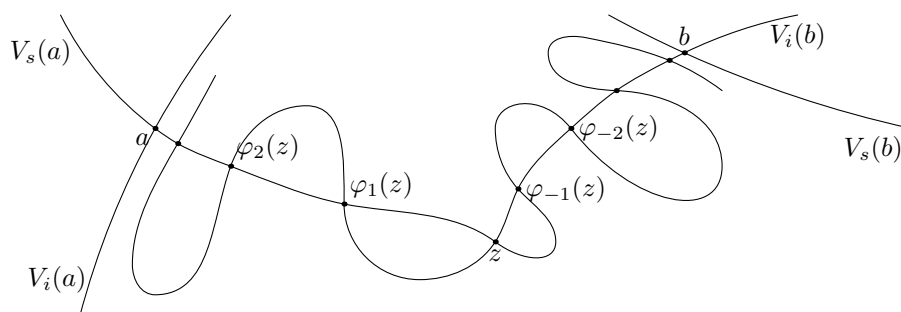


FIGURE 14 – Points hétéroclines avec intersections transverses

devenir très compliqué. Ce phénomène, qui a été découvert par Henri Poincaré [16], est un de ceux qui peuvent donner au portrait de phases d'un système dynamique une apparence chaotique.

La figure 14 représente deux points d'équilibre hyperboliques  $a$  et  $b$  d'un système dynamique à temps discret  $\{\varphi_n, n \in \mathbb{Z}\}$  dans le plan, leurs variétés stables  $V_s(a)$  et  $V_s(b)$  et leurs variétés instables  $V_i(a)$  et  $V_i(b)$ . Dans le cas présent, les variétés stables et instables, de dimension 1, sont des lignes puisqu'il s'agit d'un système dynamique dans le plan. Nous avons supposé que  $V_s(a)$  et  $V_i(b)$  se rencontrent en un point  $z$  (dit *hétérocline*), sans être tangentes en ce point. Puisque  $z$  est élément de la variété stable  $V_s(a)$  du point  $a$ , les itérés  $\varphi_n(z)$  du point  $z$  pour  $n \geq 0$  sont tous sur  $V_s(a)$  et forment une suite qui converge vers  $a$ ; mais ces points appartiennent tous aussi à  $V_i(b)$ , et par suite  $V_s(a)$  et  $V_i(b)$  se rencontrent non seulement en un point  $z$ , mais en une infinité de points  $\varphi_n(z)$ , pour tous  $n \geq 0$  formant une suite convergeant vers  $a$ . Le même raisonnement s'appliquant à  $\varphi_{-n}$ , nous voyons que  $V_s(a)$  et  $V_i(b)$  se rencontrent aussi en une infinité de points  $\varphi_{-n}(z)$ , pour tous les  $n \geq 0$ , formant une suite qui converge vers  $b$ .

Ce phénomène peut aussi avoir lieu lorsque  $a = b$ , c'est-à-dire lorsque  $a$  est un point d'équilibre hyperbolique dont la variété stable  $V_s(a)$  rencontre la variété instable  $V_i(a)$  en un point  $z$  (dit *homocline*) sans lui être tangente en ce point.

## Indications historiques et bibliographiques

Nous n'avons pu donner dans cet article qu'un aperçu très incomplet de ce que la théorie moderne des systèmes dynamiques doit à Henri Poincaré. Nous aurions pu mentionner aussi la *théorie de l'indice*. Poincaré montre dans [12] qu'à chaque point d'équilibre d'un champ de vecteurs dans le plan (ou sur une variété de dimension 2) on peut attacher un nombre entier appelé *indice* de ce point (en gros, c'est le nombre algébrique de tours que fait la direction du champ de vecteurs lorsqu'on fait un tour sur une courbe fermée dont l'intérieur contient ce point et ne contient pas d'autre point d'équilibre). L'indice d'un point d'équilibre non dégénéré est égal soit à 1, soit à  $-1$ ; plus précisément, l'indice d'un nœud, d'un foyer ou d'un centre est égal à 1 et celui d'un col à  $-1$ . On peut donner des exemples de points d'équilibre (dégénérés) dont l'indice prend n'importe quelle valeur élément de  $\mathbb{Z}$ . Poincaré a montré que pour un champ de vecteurs différentiable sur la sphère de dimension 2 dont les points d'équilibre sont isolés, donc en nombre fini, la somme algébrique des indices de ces points est égale à 2. Plus généralement pour un champ de vecteurs différentiable sur une surface compacte  $M$  ayant des points d'équilibre isolés, donc en nombre fini, la somme algébrique des indices de tous les points d'équilibre est un entier relatif, appelé *caractéristique d'Euler* de la surface et noté  $\chi(M)$ , qui dépend de la surface considérée, mais non du champ de vecteurs. Ce résultat est connu sous le nom de *théorème de Poncaré-Hopf*. La caractéristique d'Euler d'une surface  $M$  est liée à un autre invariant topologique appelé *genre*<sup>16</sup> de la surface et noté  $g(M)$  par la relation  $\chi(M) = 2(1 - g(M))$ . Ces propriétés s'étendent d'ailleurs aux variétés compactes de dimension 2 non orientables, comme par exemple la bouteille de Klein.

Voici quelques indications qui pourront peut-être guider le lecteur désirant approfondir les sujets présentés ici ou aborder les sujets que nous avons laissés de côté.

Le livre [10] du même auteur que le présent article donne un exposé plus complet des questions présentées; les figures illustrant le présent article en sont tirées.

L'article [3] d'Alain Chenciner donne en quelques pages un élégant aperçu des méthodes exposées par Poincaré dans son ouvrage magistral [17]. Le livre de June Barrow-Green [1], beaucoup plus technique et plus détaillé, présente une analyse très approfondie des travaux de Poincaré concernant la mécanique céleste.

Le lecteur trouvera d'intéressantes applications des systèmes dynamiques à l'écologie dans le livre de Morris Hirsch et Stephen Smale [7]. L'ouvrage de R. Devaney [4] est particulièrement

---

16. Le genre  $g(M)$  de la surface  $M$  est le nombre maximum de courbes fermées disjointes qu'on peut tracer sur cette surface de manière telle que coupée selon ces courbes, la surface reste connexe, en un seul morceau. Une sphère de dimension 2 est de genre 0, un tore de dimension 2 de genre 1.

recommandé, car il expose, de manière remarquablement claire, les idées essentielles de la théorie des systèmes dynamiques d'abord dans le cas simple où l'espace des phases est de dimension 1 ; de plus il traite en termes faciles à comprendre certains aspects importants (tels que la stabilité structurelle, les systèmes chaotiques, la dynamique symbolique, l'itération d'applications analytiques dans le plan complexe ou la sphère de Riemann) dont nous n'avons pas parlé.

Le livre de J. Guckenheimer et P. Holmes [6] est orienté vers l'étude des dynamiques chaotiques.

L'ouvrage de M.C. Irwin [8], relativement concis, offre une excellente présentation du théorème de Hartman et Grobman et du théorème des variétés stable et instable, avec des démonstrations complètes et élégantes. L'ouvrage de J. Palis et W. de Melo [11], quoique d'un niveau plus élevé, est partiellement abordable pour un étudiant de second cycle. Celui de Marc Chaperon [2] comporte une étude approfondie des théorèmes de conjugaison différentiable du type du théorème de Sternberg.

Le lecteur intéressé pourra trouver, sur le site internet de l'Université de Nancy II, à l'adresse <http://www.univ-nancy2.fr/poincare/chp/hpbibht.html> une liste à peu près complète des publications d'Henri Poincaré. Pour la plupart, ces publications peuvent être librement et gratuitement téléchargées depuis ce site.

## Remerciements

L'auteur remercie Corinne Baud, des éditions Ellipses, pour l'avoir autorisé à utiliser les figures de son livre *Systèmes dynamiques, une introduction*. Il remercie également Jean Paul Truc qui lui a proposé de préparer cet article et l'a aidé à le mettre en forme, et son ami d'enfance Paul Brauns pour ses critiques judicieuses et constructives.

## Références

- [1] June Barrow-Green, *Poincaré and the Three Body Problem*. American Mathematical Society and London Mathematical Society, 1997.
- [2] Marc Chaperon, *Géométrie différentielle et singularités de systèmes dynamiques*. Astérisque 138-139, Société mathématique de France, Paris, 1986.
- [3] Alain Chenciner, *Une promenade dans les Méhodes Nouvelles de la Méanique Céleste*, Observatoire de Paris, juillet 2012.
- [4] Robert L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*, second edition. Addison Wesley, Redwood City, 1989.
- [5] Jean-Marc Ginoux, Henri Poincaré et l'émergence du concept de cycle limite, dans le même numéro.
- [6] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [7] Morris W. Hirsch and Stephen Smale, *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra*. Academic Press, New York, 1974.
- [8] M.C. Irwin, *Smooth dynamical systems*. Academic Press, London, 1980.
- [9] Edward N. Lorenz, Determinist nonperiodic flow, *Journal of Atmospheric Sciences* vol. 20, n. 2, pp. 130–141.
- [10] Charles-Michel Marle, *Systèmes dynamiques, une introduction*. Ellipses Éditions Marketing S.A., Paris, 2003.
- [11] Jacob Jr. Palis and Welington de Melo, *Geometric theory of dynamical systems*. Springer-Verlag, New York, 1982.

- [12] Henri Poincaré, Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (I), *Journal de mathématiques pures et appliquées* 3-ème série, tome 7 (1881), pp. 375–422.
- [13] Henri Poincaré, Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (II), *Journal de mathématiques pures et appliquées* 3-ème série, tome 8 (1882), pp. 251–296.
- [14] Henri Poincaré, Sur les courbes définies par les équations différentielles (III), *Journal de mathématiques pures et appliquées* 4-ème série, tome 1 (1885), pp. 167–244.
- [15] Henri Poincaré, Sur les courbes définies par les équations différentielles (IV), *Journal de mathématiques pures et appliquées* 4-ème série, tome 2 (1886), pp. 151–217.
- [16] Henri Poincaré, Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique, *Acta Mathematica* vol 13, 1890, pp. 1–270.
- [17] Henri Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste, volumes I, II et III.* Gauthier-Villars, Paris, 1892, 1893 et 1899. Réimprimé par Albert Blanchard, Paris, 1987.