

Géométrie des systèmes mécaniques à liaisons actives

Charles-Michel Marle

Université Pierre et Marie Curie, Mathématiques
4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France

À Jean-Marie Souriau, dont le livre “Géométrie et relativité” [15] a joué un rôle déterminant dans l’orientation professionnelle que j’ai choisie, et dont l’autre livre “Structure des systèmes dynamiques” [16] est pour moi une source constante d’inspiration, en témoignage d’admiration et de respectueuse amitié.

1. Introduction

Nous dirons qu’un système mécanique est à *liaisons actives* s’il comporte certaines liaisons sur lesquelles un opérateur (qui peut soit faire partie du système, soit lui être extérieur) agit, influant ainsi sur le mouvement du système. Donnons quelques exemples:

- un enfant sur une escarpolette peut, en faisant jouer les articulations de son corps, mettre l’escarpolette en mouvement;
- un chat qui tombe en chute libre peut, en déformant son corps, modifier son orientation dans l’espace afin d’arriver au sol sur ses pattes;
- un satellite artificiel (tel que le télescope spatial Hubble) comporte des articulations auxquelles sont liés divers dispositifs (panneaux solaires, antennes, volants d’inertie, appareils d’optique, ...); on peut agir sur ces articulations afin d’orienter certains éléments du satellite dans une direction déterminée.

Nous nous proposons de mettre en place dans ce travail un cadre géométrique général pour l’étude des systèmes mécaniques à liaisons actives, et d’étudier la structure des équations du mouvement de ces systèmes. Cette étude nous a été suggérée par la lecture des travaux de Marsden, Montgomery et Ratiu [12] [13] [14], où le lecteur pourra trouver d’autres points de vue.

Nous nous limitons dans ce travail à l’étude des systèmes mécaniques dont les liaisons (actives ou autres) sont de type géométrique; nous voulons dire par là que ces liaisons

ont pour effet de restreindre l'ensemble des positions des parties du système dans l'espace, ou des positions relatives de ces parties les unes par rapport aux autres; Nous laissons de côté pour le moment les systèmes comportant des liaisons cinématiques (portant à la fois sur les positions et les vitesses des parties du système). Le cas de systèmes à liaisons cinématiques holonomes pourrait se ramener, sans trop de difficulté, à celui des systèmes à liaisons géométriques que nous étudions. Mais le cas des systèmes comportant des liaisons cinématiques non holonomes (comme, par exemple, un patineur sur glace) est beaucoup plus délicat: ainsi que l'ont signalé Woodhouse [19], paragraphe 2.2, et, plus récemment, Arnold, Kozlov et Neishtadt [3], chapitre 1, paragraphe 4, on peut hésiter entre plusieurs formulations non équivalentes des équations. Ainsi dans [3] les auteurs explicitent, parallèlement à la formulation la plus connue des équations du mouvement basée sur le principe de d'Alembert-Lagrange, une autre formulation qu'ils appellent "vakonomic equations". Les équations convenant pour un problème réel pourraient, selon ces auteurs, dépendre de propriétés fines du dispositif physique servant à réaliser les liaisons ([3], chapitre 1, paragraphe 6).

Certains résultats présentés en détail ici ont été annoncés dans la note [11].

2. La formulation mathématique

L'ensemble des configurations possibles du système considéré est une variété différentiable M , appelée *variété de configuration*. Les liaisons actives sur lesquelles l'opérateur peut agir sont représentées par une submersion surjective $\pi : M \rightarrow S$ de M sur une autre variété S , appelée *variété des états de liaison*. Chaque point $s \in S$ représente un état des liaisons actives, et l'ensemble des configurations possibles lorsque les liaisons sont dans l'état s est la sous-variété $M_s = \pi^{-1}(s)$ de M , appelée *variété de configuration à liaisons figées dans l'état s* .

Les propriétés dynamiques du système sont décrites par une fonction différentiable $L : TM \rightarrow \mathbf{R}$, définie sur le fibré tangent TM à la variété de configuration M , à valeurs réelles, appelée *lagrangien*.

Lorsque l'opérateur n'agit pas sur les liaisons actives, laissant celles-ci totalement libres de jouer, la donnée de M et de L suffit à déterminer les équations du mouvement: ce sont les équations de Lagrange associées à L . Celles-ci, appelées *équations du mouvement libre*, jointes à une donnée de Cauchy (point de TM représentant la position et la vitesse du système à l'instant initial) déterminent le mouvement du système, au moins lorsque le lagrangien L est suffisamment régulier.

Mais en fait l'opérateur agit sur les liaisons actives, de sorte que le mouvement réel diffère du mouvement libre. On supposera ici que cette action a pour effet de prescrire, à chaque instant t , l'état $s = \sigma(t)$ des liaisons actives. En d'autres termes, une courbe paramétrée $\sigma : t \mapsto \sigma(t)$ dans la variété S des états de liaison est donnée; elle décrit l'évolution de l'état des liaisons actives au cours du temps, imposée par l'opérateur; le mouvement du système au cours du temps est une courbe paramétrée $t \mapsto x = c(t)$ dans la variété de configuration M vérifiant, à tout instant t ,

$$\pi(c(t)) = \sigma(t).$$

Dans la suite de ce travail, nous allons formuler les équations du mouvement en supposant la courbe paramétrée $t \mapsto s = \sigma(t)$ donnée, et étudier leur structure. Remarquons cependant que la résolution de ce problème n'est qu'un premier pas dans l'étude des systèmes à liaisons actives. L'action de l'opérateur sur l'état des liaisons actives peut en effet être soumise à certaines limitations (par exemple, les efforts que l'opérateur peut exercer sur ces liaisons sont en pratique bornés, de sorte qu'il n'est pas toujours possible d'imposer à l'état des liaisons actives d'évoluer au cours du temps suivant une loi donnée d'avance (D. Holm [7]). Et surtout, si l'opérateur agit sur les liaisons actives, c'est afin d'obtenir un certain résultat: l'enfant sur une escarpolette cherche à augmenter l'amplitude des oscillations; le chat en chute libre cherche à amener ses pattes vers le bas; le programme d'ordinateur qui contrôle un télescope spatial doit orienter le miroir dans une direction donnée puis maintenir très précisément cette orientation. La loi $t \mapsto \sigma(t)$ d'évolution de l'état des liaisons n'est donc en général pas spécifiée d'avance: l'opérateur doit la choisir afin d'atteindre le but qu'il s'est fixé, résolvant ainsi un problème de contrôle (R. Montgomery [14]). Le cadre géométrique général décrit ci-dessous nous semble bien adapté à l'étude d'un tel problème. Ainsi qu'on le verra paragraphe 8, il englobe les trois exemples de systèmes mécaniques à liaisons actives donnés dans l'introduction (enfant sur une escarpolette, chat en chute libre, satellite artificiel).

Les variétés M , S , la submersion π , le lagrangien L , la courbe paramétrée σ , ainsi que toutes les applications considérées seront, sauf spécification contraire, supposées différentiables de classe C^∞ .

3. Les équations du mouvement dans le formalisme lagrangien

À toute courbe paramétrée différentiable $c : [t_1, t_2] \rightarrow M$ dans la variété de configuration on associe l'intégrale d'action

$$I(c) = \int_{t_1}^{t_2} L \left(c(t), \frac{dc(t)}{dt} \right) dt. \quad (1)$$

D'autre part, une courbe paramétrée $\sigma : [t_1, t_2] \rightarrow S$ dans l'espace des états des liaisons actives est donnée; elle représente l'évolution au cours du temps de l'état de ces liaisons prescrite par l'opérateur.

Rappelons brièvement les quelques méthodes équivalentes qui permettent l'obtention des équations du mouvement.

3.1. Méthode basée sur le principe de moindre action.

Compte tenu des liaisons imposées variables avec le temps, l'espace-temps de configuration du système est le sous-ensemble de $\mathbf{R} \times M$:

$$N = \{ (t, x) \in \mathbf{R} \times M \mid t \in [t_1, t_2], \pi(x) = \sigma(t) \}. \quad (2)$$

Puisque π est une submersion surjective, N est une sous-variété à bord de $\mathbf{R} \times M$. La restriction à N de la projection de $\mathbf{R} \times M$ sur son premier facteur est une submersion surjective $\varpi : N \rightarrow [t_1, t_2]$.

Toute section $\tilde{c} : [t_1, t_2] \rightarrow N$ de la submersion ϖ est de la forme $t \mapsto (t, c(t))$, où $c : [t_1, t_2] \rightarrow M$ vérifie

$$\pi(c(t)) = \sigma(t) \quad \text{pour tout } t \in [t_1, t_2]. \quad (3)$$

Réciproquement, à toute courbe paramétrée $c : [t_1, t_2] \rightarrow M$ vérifiant (3) correspond une section $\tilde{c} = (\text{id}_{[t_1, t_2]}, c)$ de la submersion π .

Soit $\tilde{c} = (\text{id}_I, c)$ une section différentiable locale de ϖ . Pour tout élément t de l'intervalle de définition I de \tilde{c} ($I \subset [t_1, t_2]$), le vecteur $\frac{dc(t)}{dt} \in T_{c(t)}M$ ne dépend que du jet $j^1\tilde{c}(t)$ d'ordre 1 de \tilde{c} en t ; par suite, $j^1\tilde{c}(t) \mapsto \left(t, \frac{dc(t)}{dt}\right)$ est une application χ de l'espace $J^1\Gamma(\varpi)$ des jets d'ordre 1 de sections différentiables locales de ϖ dans $\mathbf{R} \times TM$. On vérifie que χ est injective et a pour image

$$\left\{ (t, v) \in \mathbf{R} \times TM \mid t \in [t_1, t_2], (1, v) \in T_{\varpi^{-1}(t)}N \right\}.$$

On pose $\tilde{L} = L \circ \chi$ (on considère ici L comme une fonction définie sur $\mathbf{R} \times TM$ en l'identifiant implicitement à sa composée avec la projection de $\mathbf{R} \times TM$ sur TM). Pour toute section différentiable \tilde{c} de ϖ , on définit

$$\tilde{I}(\tilde{c}) = \int_{t_1}^{t_2} \tilde{L}(j^1\tilde{c}(t)) dt, \quad (4)$$

qui n'est qu'une autre manière d'écrire l'intégrale d'action (1).

Rappelons qu'une *variation* de la section différentiable \tilde{c} de ϖ est une application différentiable $\tilde{k} :]-\epsilon, \epsilon[\times [t_1, t_2] \rightarrow N$, $\epsilon > 0$, telle que pour tout $s \in]-\epsilon, \epsilon[$, $\tilde{k}_s : t \mapsto \tilde{k}(s, t)$ soit une section de ϖ et que $\tilde{k}_0 = \tilde{c}$. Cette variation est dite à *extrémités fixées* si

$$\tilde{k}(s, t_1) = \tilde{c}(t_1) \quad \text{et} \quad \tilde{k}(s, t_2) = \tilde{c}(t_2) \quad \text{pour tout } s \in]-\epsilon, \epsilon[. \quad (5)$$

En appliquant au système, considéré comme un système lagrangien dépendant du temps, le principe de moindre action de Hamilton, on voit que la courbe paramétrée différentiable $c : [t_1, t_2] \rightarrow M$ est un mouvement du système si et seulement si $\tilde{c} = (\text{id}_{[t_1, t_2]}, c)$ est une section de ϖ qui rend l'intégrale d'action (4) stationnaire pour toute variation \tilde{k} de \tilde{c} à extrémités fixées. Cela signifie que pour toute variation \tilde{k} de \tilde{c} à extrémités fixées, on a

$$\frac{d}{ds} \tilde{I}(\tilde{k}_s) \Big|_{s=0} = 0. \quad (6)$$

3.2. Méthode basée sur le principe de Hölder.

On revient à l'expression (1) de l'intégrale d'action. Une *variation* de la courbe paramétrée différentiable $c : [t_1, t_2] \rightarrow M$ est une application différentiable $k :]-\epsilon, \epsilon[\times [t_1, t_2]$

$\rightarrow M$, $\epsilon > 0$, telle que $k(0, t) = c(t)$ pour tout $t \in [t_1, t_2]$. Cette variation est dite à *extrémités fixées* si

$$k(s, t_1) = c(t_1) \quad \text{et} \quad k(s, t_2) = c(t_2) \quad \text{pour tout} \quad s \in]-\epsilon, \epsilon[. \quad (7)$$

Une *variation infinitésimale* de c est une application différentiable $w : [t_1, t_2] \rightarrow TM$ telle que $w(t) \in T_{c(t)}M$ pour tout $t \in [t_1, t_2]$. Cette variation infinitésimale est dite à *extrémités fixées* si

$$w(t_1) = 0 \quad \text{et} \quad w(t_2) = 0. \quad (8)$$

À toute variation k de c est associée la variation infinitésimale $\delta k : t \mapsto \delta k(t) = \frac{\partial k(s, t)}{\partial s} \Big|_{s=0}$. Si k est à extrémités fixées, δk est à extrémités fixées.

Soit k une variation de c . Pour tout $s \in]-\epsilon, \epsilon[$, $k_s : t \mapsto k(s, t)$ est une courbe paramétrée différentiable dans M ; on peut donc considérer l'intégrale d'action $I(k_s)$. On montre en calcul des variations que $s \mapsto I(k_s)$ est dérivable en $s = 0$ et que la valeur de cette dérivée ne dépend que de la variation infinitésimale δk associée à k . Cette dépendance est d'ailleurs linéaire. On notera donc $\langle \delta I(c), \delta k \rangle$ la dérivée de $I(k_s)$ par rapport à s pour $s = 0$. On montre qu'elle a pour expression

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} I(k_s) \Big|_{s=0} &= \langle \delta I(c), \delta k \rangle \\ &= \left\langle \mathcal{L} \left(\frac{dc(t)}{dt} \right) \Big|_{t=t_2}, \delta k(t_2) \right\rangle - \left\langle \mathcal{L} \left(\frac{dc(t)}{dt} \right) \Big|_{t=t_1}, \delta k(t_1) \right\rangle \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} \langle [L](j^2 c(t)), \delta k(t) \rangle dt. \end{aligned} \quad (9)$$

On a noté $\mathcal{L} : TM \rightarrow T^*M$ la transformation de Legendre associée à L . Rappelons que si on note (x^i) les coordonnées locales dans une carte de M , (x^i, v^i) et (x^i, p_i) les coordonnées locales dans les cartes associées, respectivement de TM et de T^*M , la transformation de Legendre \mathcal{L} a pour expression

$$\mathcal{L} : (x^i, v^i) \mapsto \left(x^i, p_i = \frac{\partial L(x, v)}{\partial v^i} \right). \quad (10)$$

On a noté $[L]$ la différentielle de Lagrange de L (voir [17]). C'est une application définie sur l'espace des jets d'ordre 2 d'applications différentiables de \mathbf{R} dans M , à valeurs dans T^*M , fibrée au dessus de M , dont les composantes $[L]_i$ (correspondant aux coordonnées locales (p_i) sur T^*M dans les cartes considérées ci-dessus) ont pour expression

$$[L]_i(j^2 c(t)) = \frac{d}{dt} \frac{\partial L(x, v)}{\partial v^i} - \frac{\partial L(x, v)}{\partial x^i}, \quad (11)$$

avec $v(t) = \frac{dc(t)}{dt}$.

La courbe paramétrée c est dite *compatible avec les liaisons* si $\tilde{c} = (\text{id}_{[t_1, t_2]}, c)$ est une section de ϖ , c'est-à-dire si

$$\pi(c(t)) = \sigma(t) \quad \text{pour tout } t \in [T_1, t_2]. \quad (12)$$

Lorsque c'est le cas, une variation k de c est dite *compatible avec les liaisons* si pour tout $s \in]-\epsilon, \epsilon[$, la courbe paramétrée k_s est compatible avec les liaisons, ce qui s'exprime par

$$\pi(k(s, t)) = \sigma(t) \quad \text{pour tous } s \in]-\epsilon, \epsilon[, t \in [t_1, t_2]. \quad (13)$$

De même, supposant c compatible avec les liaisons, une variation infinitésimale w de c est dite *compatible avec les liaisons* si

$$T\pi(w(t)) = 0 \quad \text{pour tout } t \in [T_1, t_2]. \quad (14)$$

Le *principe de Hölder* [3] consiste à affirmer qu'une courbe paramétrée différentiable $c : [t_1, t_2] \rightarrow M$ est un mouvement du système si et seulement si elle satisfait les deux conditions,

- la courbe c est compatible avec les liaisons,
- elle rend stationnaire l'intégrale d'action $I(c)$ pour les variations infinitésimales de c à extrémités fixées compatibles avec les liaisons, ce qui signifie qu'elle vérifie

$$\langle \delta I(c), w \rangle = 0 \quad (15)$$

pour tout variation infinitésimale w de c à extrémités fixées compatible avec les liaisons.

Remarque. Si la variation k de c est compatible avec les liaisons, la variation infinitésimale correspondante δk est compatible avec les liaisons. Réciproquement, pour des liaisons géométriques telles que celles considérées ici, si w est une variation infinitésimale de c compatible avec les liaisons, il existe une variation k de c compatible avec les liaisons telle que $\delta k = w$. On doit prendre garde au fait que cette dernière propriété n'est pas toujours vraie pour des liaisons cinématiques non holonomes.

La remarque ci-dessus permet, dans le cas considéré ici de liaisons géométriques, de reformuler le principe de Hölder en disant que la courbe paramétrée $c : [t_1, t_2] \rightarrow M$ est un mouvement du système si et seulement si elle satisfait les deux conditions:

- la courbe c est compatible avec les liaisons,
- pour toute variation k de c à extrémités fixées compatible avec les liaisons, elle vérifie

$$\frac{d}{ds} I(k_s) \Big|_{s=0} = 0. \quad (16)$$

En remarquant que les expressions (1) et (4) de l'intégrale d'action sont équivalentes, on voit alors que le principe de Hölder est équivalent au principe de moindre action appliqué, comme indiqué au paragraphe 3.1, au système considéré comme dépendant du temps.

3.3. Méthode basée sur le principe de d'Alembert-Lagrange.

Soit $c : [t_1, t_2] \rightarrow M$ une courbe paramétrée différentiable compatible avec les liaisons. On appelle *déplacement virtuel infinitésimal* à l'instant $t \in]t_1, t_2[$ tout vecteur $w_t \in T_{c(t)}M$. On dit que le déplacement virtuel infinitésimal w_t à l'instant t est *compatible avec les liaisons* s'il vérifie

$$T\pi(w_t) = 0. \quad (18)$$

On appelle *travail virtuel des forces de liaison* pour le déplacement virtuel infinitésimal w_t à l'instant t , l'expression

$$\langle [L](j^2c(t)), w_t \rangle. \quad (18)$$

Le *principe de d'Alembert-Lagrange* [3] consiste à dire que la courbe paramétrée différentiable c , supposée compatible avec les liaisons, est un mouvement du système si et seulement si pour tout instant $t \in]t_1, t_2[$ et tout déplacement virtuel infinitésimal w_t à l'instant t compatible avec les liaisons, le travail virtuel des forces de liaison pour le déplacement virtuel infinitésimal w_t est nul.

Si $w : [t_1, t_2] \rightarrow TM$ est une variation infinitésimale de c à extrémités fixées, alors pour tout $t \in [t_1, t_2]$, $w(t)$ est un déplacement virtuel infinitésimal; w est compatible avec les liaisons si et seulement si $w(t)$ est compatible avec les liaisons pour tout $t \in]t_1, t_2[$. L'expression (9) de $\langle \delta I(c), w \rangle$ (dans laquelle on remplace δk par w), qui se simplifie car $w(t_1)$ et $w(t_2)$ sont nuls, w étant à extrémités fixées, montre que si la courbe paramétrée différentiable c satisfait les conditions imposées par le principe de d'Alembert-Lagrange, elle satisfait aussi les conditions imposées par le principe de Hölder. Réciproquement, le lemme fondamental du calcul des variations montre que si c satisfait les conditions imposées par le principe de Hölder, elle satisfait aussi celles imposées par le principe de d'Alembert-Lagrange. Ces deux principes sont donc bien équivalents.

On pourrait encore obtenir les équations du mouvement par application du principe de moindre courbure de Gauss ([3], chapitre 1, paragraphe 2, ou [18], chapitre 9, paragraphe 105), équivalent aux principes de Hölder et de d'Alembert-Lagrange. On ne développera pas cette méthode ici, la comparaison de différents principes pour l'obtention des équations du mouvement n'étant pas l'objet principal de ce travail. Le lecteur intéressé par ce sujet pourra se reporter à [4].

3.4. Expression des équations en coordonnées locales.

On considère une carte de M dans laquelle les coordonnées locales sont notées (x^i) , $1 \leq i \leq m = \dim M$, et une carte de S dont les coordonnées locales sont notées (s^α) ; on numérotera ces dernières de manière un peu particulière, en imposant à l'indice α de vérifier $p + 1 \leq \alpha \leq m$, avec $p = m - \dim S$; cette convention se révélera commode dans la suite. On suppose la projection $\pi(U)$ du domaine U de la carte considérée de M contenue dans le domaine V de la carte considérée de S . Dans ces cartes, l'application π a pour expression

$$s^\alpha = \pi^\alpha(x^1, \dots, x^m), \quad p + 1 \leq \alpha \leq m.$$

On note (x^i, v^i) les coordonnées locales dans la carte de TM associée à la carte considérée de M .

On supposera que la courbe paramétrée donnée $\sigma : [t_1, t_2] \rightarrow S$, représentant l'évolution de l'état des liaisons actives imposée par l'opérateur, a son image contenue dans V . Son expression dans la carte de S considérée est

$$t \mapsto (s^\alpha = \sigma^\alpha(t)), \quad p+1 \leq \alpha \leq m.$$

Soit $c : [t_1, t_2] \rightarrow M$ une courbe paramétrée différentiable dont l'image est contenue dans U . Dans les cartes considérées, cette courbe et son relèvement canonique dans TM ont pour expressions respectives

$$t \mapsto (x^i = c^i(t)), \quad \text{et} \quad t \mapsto (x^i = c^i(t), v^i = \frac{dc^i(t)}{dt}), \quad 1 \leq i \leq m.$$

Soit $w : [t_1, t_2] \rightarrow TM$ une variation infinitésimale de c à extrémités fixées ($w(t_1) = w(t_2) = 0$). Dans les cartes considérées, elle a pour expression $t \mapsto (x^i = c^i(t), v^i = w^i(t))$.

D'après (9), $\langle \delta I(c), w \rangle$ a pour expression

$$\langle \delta I(c), w \rangle = - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^m \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} \right) w^i(t) dt. \quad (19)$$

Appliquons le principe de Hölder. On doit tout d'abord exprimer que c est compatible avec les liaisons, ce qui en coordonnées locales s'écrit

$$\pi^\alpha(c(t)) = \sigma^\alpha(t), \quad p+1 \leq \alpha \leq m, \quad t \in [t_1, t_2]. \quad (20)$$

On doit encore exprimer que $\langle \delta I(c), w \rangle$ est nul pour toute variation infinitésimale w de c , à extrémités fixées, compatible avec les liaisons, ce qui en coordonnées locales s'exprime par

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial \pi^\alpha(c(t))}{\partial x^i} w^i(t) = 0 \quad \text{pour tous} \quad t \in [t_1, t_2], \quad p+1 \leq \alpha \leq m. \quad (21)$$

Le lemme fondamental du calcul des variations et la théorie des multiplicateurs de Lagrange montrent que c satisfait le principe de Hölder (donc est un mouvement du système) si et seulement s'il existe des fonctions λ_α du temps t , $p+1 \leq \alpha \leq m$, telles que pour tout i , $1 \leq i \leq m$,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} - \sum_{\alpha=p+1}^m \lambda_\alpha \frac{\partial \pi^\alpha}{\partial x^i} = 0. \quad (22)$$

Ce sont les *équations de Lagrange avec multiplicateurs*. On doit bien entendu considérer que dans ces équations, $x = (x^i)$, $v = (v^i)$, sont remplacés, respectivement, par $(c^i(t))$ et $\left(\frac{dc^i(t)}{dt} \right)$, $t \in [t_1, t_2]$.

3.5. Cas de coordonnées locales adaptées.

L'application $\pi : M \rightarrow S$ étant une submersion, on peut au voisinage de chaque point de M et au voisinage de la projection de ce point sur S , trouver des coordonnées locales (x^i) , $1 \leq i \leq m$, et (s^α) , $p+1 \leq \alpha \leq m$, de manière telle que π ait pour expression

$$(x^i) \mapsto (s^\alpha = x^\alpha).$$

En d'autres termes, on peut faire en sorte que

$$\pi^\alpha(x^1, \dots, x^m) = x^\alpha, \quad p+1 \leq \alpha \leq m, \quad (23)$$

et par suite

$$\frac{\partial \pi^\alpha}{\partial x^i} = \delta_i^\alpha, \quad 1 \leq i \leq m, \quad p+1 \leq \alpha \leq m. \quad (24)$$

Les équations (20) exprimant que c est compatible avec les liaisons s'écrivent maintenant

$$c^\alpha(t) = \sigma^\alpha(t), \quad t \in [t_1, t_2], \quad p+1 \leq \alpha \leq m, \quad (25)$$

tandis que les équations de Lagrange avec multiplicateurs (22) deviennent

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0 \quad \text{pour } 1 \leq i \leq p, \quad (26)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = \lambda_\alpha \quad \text{pour } p+1 \leq \alpha \leq m. \quad (27)$$

Les équations (26), jointes aux équations (25) exprimant les liaisons, déterminent le mouvement (au moins lorsque le lagrangien est suffisamment régulier). Une fois celui-ci déterminé, les équations (27) donnent les valeurs des multiplicateurs de Lagrange λ_α . La connaissance de ceux-ci est utile pour le calcul de la puissance des forces de liaison, qui a pour expression

$$\sum_{\alpha=p+1}^m \lambda_\alpha \frac{d\sigma^\alpha}{dt}. \quad (28)$$

4. Les équations du mouvement dans le formalisme hamiltonien

On suppose pour simplifier le lagrangien L hyper-régulier [1], [6], c'est-à-dire tel que la transformation de Legendre $\mathcal{L} : TM \rightarrow T^*M$ qu'il définit soit un difféomorphisme. Cette hypothèse pourrait d'ailleurs être affaiblie (voir exemple 8.5 ci-après). Le hamiltonien $H : T^*M \rightarrow \mathbf{R}$ est défini par

$$H = (i(Z)dL - L) \circ \mathcal{L}^{-1}, \quad (29)$$

où Z désigne le champ de vecteurs de Liouville sur TM .

4.1. Expression des équations en coordonnées locales.

On considère une carte de M et une carte de S , ainsi que les cartes associées de TM et de T^*M . Les notations utilisées sont celles du paragraphe 3.4. On a déjà indiqué en (10) l'expression de la transformation de Legendre \mathcal{L} au moyen des coordonnées locales (x^i, v^i) sur TM , (x^i, p_i) sur T^*M . Celle du hamiltonien est

$$H(x, p) = \sum_{i=1}^m p_i v^i - L(x, v), \quad (30)$$

en considérant qu'au second membre, $v = (v^i)$ est exprimé au moyen de $x = (x^i)$ et de $p = (p_i)$ grâce à \mathcal{L}^{-1} . On remarque que, pour tout i ($1 \leq i \leq m$),

$$\frac{\partial H(x, p)}{\partial x^i} = -\frac{\partial L(x, v)}{\partial x^i}, \quad (31)$$

$$\frac{\partial H(x, p)}{\partial p_i} = v^i. \quad (32)$$

Comme $v^i = \frac{dx^i}{dt}$, cette équation donne la première équation de Hamilton

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H(x, p)}{\partial p_i}. \quad (33)$$

D'autre part, les équations de Lagrange avec multiplicateurs (22) deviennent

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^m \lambda_\alpha \frac{\partial \pi^\alpha}{\partial x^i}. \quad (34)$$

C'est la seconde équation de Hamilton avec multiplicateurs. Les équations de Hamilton (33) et (34), jointes aux équations (20) exprimant les liaisons, déterminent le mouvement du système.

4.2. Cas de coordonnées locales adaptées.

Comme au paragraphe 3.5, on suppose ici les coordonnées locales adaptées à la submersion $\pi : M \rightarrow S$. On utilise les mêmes notations que dans ce paragraphe. En dérivant par rapport à t l'équation (25) exprimant les liaisons on obtient

$$\frac{dx^\alpha}{dt} = \frac{d\sigma^\alpha}{dt}, \quad p+1 \leq \alpha \leq m. \quad (35)$$

En tenant compte de ces relations dans les $m-p$ dernières équations de Hamilton (34), le système de Hamilton (33), (34) peut s'écrire

$$\begin{aligned} \frac{dx^i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} && \text{pour } 1 \leq i \leq p, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x^i} \end{aligned} \quad (36)$$

$$\frac{d\sigma^\alpha}{dt} - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = 0 \quad \text{pour } p+1 \leq \alpha \leq m, \quad (37)$$

$$\frac{dp_\alpha}{dt} + \frac{\partial H}{\partial x^\alpha} = \lambda_\alpha \quad \text{pour } p+1 \leq \alpha \leq m. \quad (38)$$

Dans (37), le terme $\frac{d\sigma^\alpha}{dt}$ est connu, puisque la loi d'évolution σ de l'état des liaisons actives en fonction du temps est imposée par l'opérateur. Cette équation doit être utilisée afin de déterminer les coordonnées locales p_α ($p+1 \leq \alpha \leq m$) en fonction des x^i , x^α , p_i et des quantités connues $\frac{d\sigma^\alpha}{dt}$, ce qui est souvent possible, au moins localement (voir hypothèse paragraphe 5). Portant ces expressions de p_α dans les équations (36), on obtient un système d'équations qui suffit à déterminer le mouvement (les équations (38) ne sont pas nécessaires pour cela, elles servent seulement à déterminer les multiplicateurs de Lagrange λ_α).

5. Une expression géométrique intrinsèque des équations du mouvement

Soit $VM = \ker(T\pi)$ le sous-fibré vertical (relativement à la submersion $\pi : M \rightarrow S$) du fibré tangent TM . Soit V^*M le fibré dual de VM . On sait qu'il s'identifie au quotient de T^*M (fibré cotangent à M) par son sous-fibré $(VM)^0$, annulateur de VM (fibré des 1-formes sur M nulles sur VM). On a donc une projection canonique $\zeta : T^*M \rightarrow V^*M$. On sait que V^*M possède une structure naturelle de variété de Poisson [8] pour laquelle ζ est une application de Poisson: en effet V^*M s'identifie au quotient de T^*M par le feuilletage engendré par les champs de vecteurs hamiltoniens dont les hamiltoniens sont images réciproques (par la projection composée $T^*M \rightarrow M \rightarrow S$) de fonctions différentiables sur S . On note $q : V^*M \rightarrow M$ la projection canonique (déduite par quotient de la projection canonique $T^*M \rightarrow M$) et on pose $\tilde{\pi} = \pi \circ q : V^*M \rightarrow S$. On supposera pour simplifier que pour tout état $s \in S$ des liaisons actives, l'espace de configuration $M_s = \pi^{-1}(s)$ pour des liaisons fixées dans l'état s est connexe. On voit alors que S s'identifie à l'ensemble des feuilles symplectiques de la variété de Poisson V^*M , car pour tout point $s \in S$, $\tilde{\pi}^{-1}(s)$ est une feuille symplectique de V^*M canoniquement symplectomorphe à l'espace des phases T^*M_s du système lorsque les liaisons sont figées dans l'état s . Soit $T\pi : TM \rightarrow TS$ le prolongement aux vecteurs de la submersion $\pi : M \rightarrow S$, $\pi^*(TS)$ le fibré de base M image réciproque par π du fibré tangent TS de base S , et $\widetilde{T\pi} : TM \rightarrow \pi^*(TS)$ le morphisme de fibrés correspondant à $T\pi$. En le composant avec la transformation de Legendre inverse $\mathcal{L}^{-1} : T^*M \rightarrow TM$, on obtient une application $\widetilde{T\pi} \circ \mathcal{L}^{-1} : T^*M \rightarrow \pi^*(TS)$, fibrée au dessus de l'identité de M (mais pas nécessairement linéaire sur chaque fibre). De même, l'application $(\zeta, \widetilde{T\pi} \circ \mathcal{L}^{-1}) : T^*M \rightarrow V^*M \oplus \pi^*(TS)$ est fibrée au dessus de l'identité de M . On fera dans la suite l'hypothèse suivante.

Hypothèse. L'application $(\zeta, \widetilde{T\pi} \circ \mathcal{L}^{-1}) : T^*M \rightarrow V^*M \oplus \pi^*(TS)$ est un difféomorphisme.

Remarques.

1. Dans les coordonnées locales adaptées des paragraphes 3.5 et 4.2, (x^i, x^α, p_i) , $1 \leq i \leq p$, $p+1 \leq \alpha \leq m$, sont des coordonnées locales sur V^*M , et la projection $\zeta : T^*M \rightarrow V^*M$ a pour expression $(x^i, x^\alpha, p_i, p_\alpha) \mapsto (x^i, x^\alpha, p_i)$. De même, (x^i, x^α, v^i) sont des coordonnées locales sur $\pi^*(TS)$ et l'application $\widetilde{T\pi} : TM \rightarrow \pi^*(TS)$ a pour

expression $(x^i, x^\alpha, v^i, v^\alpha) \mapsto (x^i, x^\alpha, v^\alpha)$. Enfin $(x^i, x^\alpha, p_i, v^\alpha)$ sont des coordonnées locales sur $V^*M \oplus \pi^*(TS)$, et l'application $(\zeta, \widetilde{T\pi} \circ \mathcal{L}^{-1}) : T^*M \rightarrow V^*M \oplus \pi^*(TS)$ a pour expression $(x^i, x^\alpha, p_i, p_\alpha) \mapsto (x^i, x^\alpha, p_i, v^\alpha)$, avec $v^\alpha = \frac{\partial H(x, p)}{\partial p_\alpha}$.

2. L'hypothèse ci-dessus n'est pas toujours vérifiée, même lorsque le lagrangien L est hyper-régulier. Considérons par exemple le cas où $M = \mathbf{R}^2$ (coordonnées x^1, x^2), $S = \mathbf{R}$, la projection π étant $(x^1, x^2) \mapsto x^2$. Prenons pour lagrangien

$$L(x, v) = v^1 v^2. \quad (39)$$

La transformation de Legendre a pour expression $(x^1, x^2, v^1, v^2) \mapsto (x^1, x^2, p_1 = v^2, p_2 = v^1)$; c'est un difféomorphisme. Le hamiltonien H a pour expression

$$H(x, p) = p_1 p_2. \quad (40)$$

L'application $(\zeta, \widetilde{T\pi} \circ \mathcal{L}^{-1})$ a pour expression $(x^1, x^2, p_1, p_2) \mapsto (x^1, x^2, p_1, v^2 = p_1)$; ce n'est pas un difféomorphisme.

3. Cependant, cette hypothèse est automatiquement vérifiée si L est un lagrangien classique, de la forme

$$L(x, v) = \frac{1}{2} g_x(v, v) - P(x), \quad x \in M, \quad v \in T_x M, \quad (41)$$

où g est une métrique riemannienne et P une fonction différentiable sur M . Dans les coordonnées locales adaptées des paragraphes 3.6 et 4.2, la métrique g a pour expression

$$g_x(v, v) = \sum_{(i,j)} g_{ij} v^i v^j + 2 \sum_{(i,\alpha)} g_{i\alpha} v^i v^\alpha + \sum_{(\alpha,\beta)} g_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta, \quad (42)$$

où i et j prennent les valeurs $1, \dots, p$, α et β les valeurs $p+1, \dots, m$. Les g_{ij} , $g_{i\alpha}$ et $g_{\alpha\beta}$ sont fonctions des coordonnées locales (x^i, x^α) . La métrique étant définie positive, la matrice $(m-p) \times (m-p)$ formée par ses composantes $g_{\alpha\beta}$ est inversible. Il est facile d'en déduire que $(\zeta, \widetilde{T\pi} \circ \mathcal{L}^{-1})$ est un isomorphisme de fibrés vectoriels de base M .

Comme au paragraphe 3, on suppose que l'action de l'opérateur sur l'état des liaisons actives est décrit par une courbe paramétrée différentiable $\sigma : [t_1, t_2] \rightarrow S$. Le mouvement du système est décrit par une courbe paramétrée différentiable $c : [t_1, t_2] \rightarrow M$ telle que $\pi(c(t)) = \sigma(t)$ pour tout $t \in [t_1, t_2]$. On note $\frac{dc}{dt} : [t_1, t_2] \rightarrow TM$ le relèvement naturel de c dans le fibré tangent à M . On compose $\frac{dc}{dt}$ avec la transformation de Legendre $\mathcal{L} : TM \rightarrow T^*M$ et avec la projection $\zeta : T^*M \rightarrow V^*M$. On obtient ainsi une courbe paramétrée $\widehat{c} = \zeta \circ \mathcal{L} \circ \frac{dc}{dt} : [t_1, t_2] \rightarrow V^*M$, qui représente l'évolution, au cours du temps, de l'état dynamique du système, compte tenu de l'évolution imposée aux liaisons actives.

Pour tout $t \in [t_1, t_2]$, on note $s_t = \sigma(t) \in S$ l'état des liaisons actives et $\dot{s}_t = \frac{d\sigma(t)}{dt} \in T_{s_t}S$ l'évolution infinitésimale (dérivée par rapport au temps) de cet état à l'instant t , imposés par l'opérateur. En composant le difféomorphisme $(\zeta, \widetilde{T\pi} \circ \mathcal{L}^{-1})^{-1}$ avec l'application injective $z \mapsto (z, \pi^*(\dot{s}_t))$ de la feuille symplectique $\widetilde{\pi}^{-1}(s_t) \subset V^*M$ dans $V^*M \oplus \pi^*(TS)$, on obtient une immersion injective $\chi_{\dot{s}_t} : \widetilde{\pi}^{-1}(s_t) \rightarrow T^*M$, qui dépend évidemment du choix de \dot{s}_t . Dans les coordonnées locales adaptées des paragraphes 3.6 et 4.2, cette immersion a pour expression $(x^i, x^\alpha, p_i) \mapsto (x^i, x^\alpha, p_i, p_\alpha)$, où les p_α sont obtenus en résolvant l'équation

$$\dot{s}_t^\alpha = \frac{\partial H(x^i, x^\alpha, p_i, p_\alpha)}{\partial p_\alpha}. \quad (43)$$

Soit X_H le champ de vecteurs hamiltonien sur T^*M , relativement à sa structure symplectique canonique, associé au hamiltonien H . C'est le champ de vecteurs définissant, dans la formulation hamiltonienne, le mouvement libre du système (mouvement lorsque les liaisons actives sont laissées complètement libres). On restreint ce champ de vecteurs à l'image de l'immersion $\chi_{\dot{s}_t}$, et on projette cette restriction sur V^*M , par le prolongement aux vecteurs de la projection $\zeta : T^*M \rightarrow V^*M$. On obtient ainsi un champ de vecteurs $D_{\dot{s}_t}$ le long de la sous-variété $\widetilde{\pi}^{-1}(s_t)$ de V^*M (qui, en général, n'est pas tangent à cette sous-variété). On remarque que la projection de $D_{\dot{s}_t}$ sur S est automatiquement égale au vecteur $\dot{s}_t \in T_{s_t}S$.

Proposition. Pour tout $t \in [t_1, t_2]$, on a

$$\frac{d\widehat{c}(t)}{dt} = D_{\dot{s}_t}(\widehat{c}(t)). \quad (44)$$

Cette proposition exprime le fait que le champ de vecteurs $D_{\dot{s}_t}$ le long de la sous-variété $\widetilde{\pi}^{-1}(s_t)$ représente l'évolution infinitésimale de l'état dynamique du système à l'instant t .

Démonstration.

Les équations de Hamilton (36), (37) et (38) ne font qu'exprimer, dans les coordonnées locales adaptées des paragraphes 3.5 et 4.2, la construction géométrique de $D_{\dot{s}_t}$ décrite ci-dessus. \square

Remarque. On a construit ci-dessus, pour tout $t \in [t_1, t_2]$, un champ de vecteurs $D_{\dot{s}_t}$ le long de la sous-variété $\widetilde{\pi}^{-1}(s_t)$ de V^*M . Cela ne nous donne pas un champ de vecteurs partout défini sur V^*M . Si l'on souhaite décrire l'évolution infinitésimale du système au moyen d'un champ de vecteurs partout défini sur un espace d'évolution, on peut considérer l'image réciproque $\sigma^*(V^*M)$ de V^*M (considéré comme fibré sur la base S , par la projection $\widetilde{\pi}$) par l'application $\sigma : [t_1, t_2] \rightarrow S$. On voit que $\sigma^*(V^*M)$ est fibré sur $[t_1, t_2]$ et muni d'une structure canonique, au sens de Lichnerowicz [9]. En prenant pour chaque instant $t \in [t_1, t_2]$ l'image réciproque par σ du champ de vecteurs $D_{\dot{s}_t}$ le long de $\widetilde{\pi}^{-1}(s_t)$, on obtient un champ de vecteurs, noté $\sigma^*(D)$, partout défini sur $\sigma^*(V^*M)$, se projetant sur $[t_1, t_2]$ en le champ constant $\frac{\partial}{\partial t}$. Par la même méthode que celle utilisée plus

loin (théorème du paragraphe 6), on montre que $\sigma^*(D)$ est un champ de vecteurs canonique au sens de Lichnerowicz [9], qui définit l'évolution infinitésimale de l'état dynamique du système. Cette approche avait été déjà utilisée en [10] pour la description des systèmes mécaniques à liaisons dépendant du temps.

6. Propriétés de la dynamique

Dans cette partie, au lieu de raisonner sur $\sigma^*(V^*M)$ comme dans la remarque précédente, on suppose un champ de vecteurs Y donné sur S . L'opérateur agit sur les liaisons actives de manière telle que l'évolution $\sigma : t \mapsto \sigma(t)$ de leur état au cours du temps soit une courbe intégrale de Y . La construction décrite dans le paragraphe précédent permet alors de définir, pour tout point $s \in S$, un champ de vecteurs $D_{Y(s)}$ le long de la sous-variété $\tilde{\pi}^{-1}(s)$ de V^*M . La réunion de ces champs de vecteurs le long des feuilles symplectiques de V^*M est un champ de vecteurs D_Y sur V^*M , appelé *champ dynamique*, car la courbe paramétrée $\hat{c} = \zeta \circ \mathcal{L} \circ \frac{dc}{dt}$ dans V^*M qui représente l'évolution, au cours du temps, de l'état dynamique du système, est une courbe intégrale de D_Y . On remarque que D_Y est projectable sur S et a pour projection Y .

Proposition. *Pour tout champ de vecteurs Y sur S , le champ de vecteurs dynamique correspondant D_Y sur V^*M est un automorphisme infinitésimal de Poisson. Lorsque Y est identiquement nul, c'est-à-dire lorsque les liaisons actives sont figées, le champ dynamique correspondant, noté D_0 , est hamiltonien (relativement à la structure de Poisson de V^*M), donc tangent au feuilletage symplectique.*

Démonstration. Soit $\chi : V^*M \rightarrow T^*M$ l'application composée de $(\zeta, \tilde{T}\pi \circ \mathcal{L}^{-1})^{-1} : V^*M \oplus \pi^*(TS) \rightarrow T^*M$ et de l'application injective $z \mapsto (z, \pi^*Y(\tilde{\pi}(z)))$ de V^*M dans $V^*M \oplus \pi^*(TS)$. On pose $\tilde{H} = H \circ \chi$. Dans les coordonnées locales adaptées du paragraphe 4.2, $\tilde{H}(x^i, x^\alpha, p_i)$ s'obtient en remplaçant dans $H(x^i, x^\alpha, p_i, p_\alpha)$ les p_α par leurs expressions en fonction des (x^i, x^α, p_i) tirées de

$$\frac{\partial H(x^i, x^\alpha, p_i, p_\alpha)}{\partial p_\beta} = Y^\beta(x^\alpha). \quad (45)$$

On a donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{H}(x^i, x^\alpha, p_i)}{\partial x^i} &= \frac{\partial H(x^i, x^\alpha, p_i, p_\alpha)}{\partial x^i} + \sum_{\beta=p+1}^m \frac{\partial H(x^i, x^\alpha, p_i, p_\alpha)}{\partial p_\beta} \frac{\partial p_\beta}{\partial x^i} \\ &= \frac{\partial H(x^i, x^\alpha, p_i, p_\alpha)}{\partial x^i} + \sum_{\beta=p+1}^m Y^\beta(x^\alpha) \frac{\partial p_\beta}{\partial x^i}, \end{aligned}$$

et, de même,

$$\frac{\partial \tilde{H}(x^i, x^\alpha, p_i)}{\partial p_i} = \frac{\partial H(x^i, x^\alpha, p_i, p_\alpha)}{\partial p_i} + \sum_{\beta=p+1}^m Y^\beta(x^\alpha) \frac{\partial p_\beta}{\partial p_i}.$$

Comme les $Y^\beta(x^\alpha)$ ne dépendent que des coordonnées x^α , non des (x^i, p_i) , on peut écrire

$$\frac{\partial H(x^i, x^\alpha, p_i, p_\alpha)}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\tilde{H}(x^i, x^\alpha, p_i) - \sum_{\beta=p+1}^m Y^\beta(x^\alpha) p_\beta \right),$$

$$\frac{\partial H(x^i, x^\alpha, p_i, p_\alpha)}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\tilde{H}(x^i, x^\alpha, p_i) - \sum_{\beta=p+1}^m Y^\beta(x^\alpha) p_\beta \right),$$

en considérant bien entendu que les p_α sont remplacés par leurs expressions en fonction des (x^i, x^α, p_i) . Observons cependant que les dérivations partielles $\frac{\partial H}{\partial x^i}$ (resp., $\frac{\partial H}{\partial p_i}$) figurant dans les membres de gauche de ces équations doivent être calculées pour x^α, p_j, p_α et x^k ($k \neq i$) constants (resp., x^j, x^α, p_α et p_k ($k \neq i$) constants), avant remplacement des p_α par leurs expressions en fonction des (x^i, x^α, p_i) .

Les équations de Hamilton (36) peuvent donc s'écrire

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\tilde{H} - \sum_{\beta=p+1}^m Y^\beta p_\beta \right),$$

$$\frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\tilde{H} - \sum_{\beta=p+1}^m Y^\beta p_\beta \right).$$
(46)

Comme on a, d'autre part,

$$\frac{dx^\alpha}{dt} = Y^\alpha,$$
(47)

le champ de vecteurs D_Y a pour expression

$$D_Y = \sum_{\alpha=p+1}^m Y^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \sum_{i=1}^m \left[\frac{\partial}{\partial p_i} \left(\tilde{H} - \sum_{\beta=p+1}^m Y^\beta p_\beta \right) \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\tilde{H} - \sum_{\beta=p+1}^m Y^\beta p_\beta \right) \frac{\partial}{\partial p_i} \right].$$
(48)

Or le tenseur de Poisson de V^*M a pour expression

$$\Lambda = \sum_{i=1}^p \frac{\partial}{\partial p_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^i}.$$
(49)

Dans le domaine de la carte considérée, le champ de vecteurs D_Y s'exprime donc comme somme de $\sum_{\alpha=p+1}^m Y^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$, qui est un automorphisme infinitésimal de Poisson de V^*M ,

transverse aux feuilles symplectiques, et du champ de vecteurs hamiltonien associé à $\tilde{H} - \sum_{\beta=p+1}^m Y^\beta p_\beta$, qui est aussi un automorphisme infinitésimal de Poisson de V^*M , tangent aux feuilles symplectiques. Dans le cas particulier où Y est nul, le champ de vecteurs correspondant D_0 est hamiltonien (relativement à la structure de Poisson de V^*M) et a pour hamiltonien \tilde{H} . \square

Remarque. La décomposition du champ dynamique D_Y utilisée dans la démonstration ci-dessus, en somme d'un champ de vecteurs transverse aux feuilles symplectiques et d'un champ hamiltonien tangent aux feuilles symplectiques, est locale; elle dépend du choix des cartes de M et de S adaptées à la submersion π utilisées dans la démonstration. On verra ci-dessous que dans le cas d'un système mécanique classique, il existe une décomposition globale remarquable du champ dynamique D_Y .

7. Cas d'un système mécanique classique

On suppose maintenant que le système considéré est un système mécanique classique, dont le lagrangien L est de la forme (41). Le terme $\frac{1}{2}g_x(v, v)$ est l'énergie cinétique du système et la fonction $P(x)$ son énergie potentielle. La métrique g permet de définir, de manière naturelle, une forme bilinéaire symétrique Θ sur le fibré vectoriel $\pi^*(TS)$. En effet, pour tout point $x \in M$, l'orthogonal de $V_xM = \ker(T_x\pi)$ relativement à g_x est un supplémentaire de V_xM dans T_xM . Par suite, la restriction de $T_x\pi$ à cet orthogonal est un isomorphisme de cet orthogonal sur $T_{\pi(x)}S$. On peut donc définir Θ en posant

$$\Theta_x(\pi^*u_1, \pi^*u_2) = g_x(v_1, v_2), \quad x \in M, \quad u_1 \text{ et } u_2 \in T_{\pi(x)}S, \quad (50)$$

où π^*u_1 et π^*u_2 sont deux éléments de la fibre en x de $\pi^*(TS)$ correspondant aux vecteurs u_1 et u_2 tangents en $\pi(x)$ à S , et où v_1 et v_2 sont les vecteurs tangents en x à M orthogonaux au sous-espace vertical $V_xM = \ker(T_x\pi)$ (relativement à g_x), et tels que $T_x\pi(v_1) = u_1$, $T_x\pi(v_2) = u_2$.

Comme dans le paragraphe précédent on suppose un champ de vecteurs Y donné sur M . On peut alors définir une fonction $K_Y : M \rightarrow \mathbf{R}$ en posant, pour tout $x \in M$,

$$K_Y(x) = \frac{1}{2}\Theta_x(\pi^*(Y_{\pi(x)}), \pi^*(Y_{\pi(x)})). \quad (51)$$

La fonction K_Y s'interprète, dans une certaine mesure, comme l'énergie cinétique des liaisons actives. Par un léger abus de notations, on notera encore $K_Y : V^*M \rightarrow \mathbf{R}$ l'application composée de K_Y et de la projection canonique $q : V^*M \rightarrow M$. On note X_{K_Y} le champ de vecteurs hamiltonien sur V^*M (pour la structure de Poisson canonique de cette variété) qui lui est associé. On peut alors énoncer:

Théorème. *Pour tout champ de vecteurs Y sur S , le champ de vecteurs dynamique correspondant D_Y s'exprime comme somme de trois termes:*

$$D_Y = D_0 - X_{K_Y} + H(Y). \quad (52)$$

Le premier terme D_0 est le champ dynamique correspondant au cas où Y est identiquement nul. Le second terme $-X_{K_Y}$ est l'opposé du champ de vecteurs hamiltonien sur V^*M associé à la fonction K_Y (énergie cinétique des liaisons actives). Le troisième terme $H(Y)$ est le relèvement horizontal du champ de vecteurs Y sur S relativement à une connexion d'Ehresmann [5] sur le fibré $\tilde{\pi} : V^*M \rightarrow S$, appelée connexion dynamique, entièrement déterminée par la submersion $\pi : M \rightarrow S$ et par la métrique riemannienne g sur M .

Démonstration. On utilise les coordonnées locales adaptées du paragraphe 4.2, les indices latins i, j, \dots prenant les valeurs $1, \dots, p$, et les indices grecs α, β, \dots les valeurs $p+1, \dots, m$. Pour alléger l'écriture, on utilise dans la suite la convention d'Einstein (sommation par rapport aux indices apparaissant une fois en position basse et une fois en position haute). On note $(g_{ij}, g_{i\beta}, g_{\alpha j}, g_{\alpha\beta})$ les composantes de la matrice représentant la métrique g , et $(g^{ij}, g^{i\beta}, g^{\alpha j}, g^{\alpha\beta})$ les composantes de la matrice inverse. Le lagrangien L et le hamiltonien H ont pour expressions

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}(g_{ij}v^i v^j + g_{i\beta}v^i v^\beta + g_{\alpha j}v^\alpha v^j + g_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta) - P, \\ H &= \frac{1}{2}(g^{ij}p_i p_j + g^{i\beta}p_i p_\beta + g^{\alpha j}p_\alpha p_j + g^{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta) + P. \end{aligned}$$

On note $\Theta_{\alpha\beta}$ les composantes de la matrice inverse de la matrice formée par les $g^{\alpha\beta}$. On vérifie aisément que les $\Theta_{\alpha\beta}$ sont bien les composantes de la forme bilinéaire Θ sur le fibré vectoriel $\pi^*(TS)$ dont on a donné ci-dessus une définition intrinsèque.

L'équation (45) s'écrit maintenant, compte tenu de la symétrie de g ,

$$Y^\beta = \frac{\partial H}{\partial p_\beta} = g^{i\beta}p_i + g^{\alpha\beta}p_\alpha,$$

d'où

$$p_\alpha = \Theta_{\alpha\beta}(Y^\beta - g^{i\beta}p_i).$$

La fonction \tilde{H} a donc pour expression

$$\tilde{H} = \tilde{H}_0 + \frac{1}{2}\Theta_{\alpha\beta}Y^\alpha Y^\beta,$$

où on a posé

$$\tilde{H}_0 = \frac{1}{2}(g^{ij} - g^{i\alpha}\Theta_{\alpha\beta}g^{\beta j})p_i p_j + P.$$

On remarque que dans le cas particulier où Y est nul, \tilde{H} se réduit à \tilde{H}_0 . Par suite \tilde{H}_0 , tout comme \tilde{H} , est une fonction définie de manière intrinsèque sur V^*M , qui ne dépend pas du choix des cartes dans lesquelles on l'a exprimée.

La fonction (localement définie, dans les cartes considérées) $\tilde{H} - Y^\alpha p_\alpha$, qui intervient dans l'écriture (46) des équations de Hamilton, peut s'écrire sous la forme

$$\tilde{H} - Y^\alpha p_\alpha = \tilde{H}_0 + \Theta_{\alpha\beta}g^{i\beta}p_i Y^\alpha - \frac{1}{2}\Theta_{\alpha\beta}Y^\alpha Y^\beta.$$

En remarquant que les composantes de g et de Θ ne sont fonctions que des coordonnées locales (x^i, x^α) , et que les Y^α ne sont fonctions que des (x^α) , on voit que les équations de Hamilton (46) peuvent s'écrire

$$\begin{aligned}\frac{dx^i}{dt} &= \frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial p_i} + \Theta_{\alpha\beta} g^{i\beta} Y^\alpha, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial x^i} - p_k Y^\alpha \frac{\partial(\Theta_{\alpha\beta} g^{k\beta})}{\partial x^i} + \frac{1}{2} Y^\alpha Y^\beta \frac{\partial \Theta_{\alpha\beta}}{\partial x^i}.\end{aligned}$$

Le champ de vecteurs dynamique D_Y peut donc s'écrire

$$\begin{aligned}D_Y &= \left(\frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right) \\ &+ Y^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \Theta_{\alpha\beta} g^{\beta k} \frac{\partial}{\partial x^k} - p_k \frac{\partial(\Theta_{\alpha\beta} g^{\beta k})}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right) \\ &+ \frac{1}{2} Y^\alpha Y^\beta \frac{\partial \Theta_{\alpha\beta}}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial p_i}.\end{aligned}$$

On voit que D_Y est somme de trois termes. Le premier,

$$\frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial p_i},$$

n'est autre que D_0 , champ dynamique dans le cas particulier où les liaisons sont bloquées. Le troisième terme, quadratique par rapport aux Y^α , s'écrit

$$\frac{1}{2} Y^\alpha Y^\beta \frac{\partial \Theta_{\alpha\beta}}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Mais la fonction K_Y , définie par (51), a pour expression

$$K_Y = \frac{1}{2} \Theta_{\alpha\beta} Y^\alpha Y^\beta.$$

Elle n'est fonction que des coordonnées (x^i, x^α) . Par suite le troisième terme, qui s'écrit

$$\frac{\partial K_Y}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial p^i},$$

n'est autre que $-X_{K_Y}$. Ce terme est donc défini de manière intrinsèque, indépendamment du choix des cartes dans lesquelles on l'a exprimé.

Puisque le premier et le troisième terme de D_Y , ainsi que D_Y lui-même, sont définis de manière intrinsèque, il en est de même de son second terme. Celui-ci a pour expression

$$Y^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \Theta_{\alpha\beta} g^{\beta k} \frac{\partial}{\partial x^k} - p_k \frac{\partial(\Theta_{\alpha\beta} g^{\beta k})}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right). \quad (53)$$

Il dépend linéairement des Y^α , et se projette sur S selon le champ de vecteurs Y . C'est donc le relèvement horizontal de Y relativement à une connexion d'Ehresmann sur V^*M . L'expression (53) montre que cette connexion est entièrement déterminée par la submersion π et la métrique riemannienne g sur M . \square

Afin de donner une définition intrinsèque de la connexion dynamique sur le fibré $\tilde{\pi} : V^*M \rightarrow S$, on remarque que la métrique riemannienne g permet de définir, de manière naturelle, une connexion d'Ehresmann sur le fibré $\pi : M \rightarrow S$, qu'on appellera *connexion cinétique* (car elle est définie au moyen de l'énergie cinétique). Par définition, pour tout point x de M et tout vecteur $u \in T_{\pi(x)}S$, le relèvement horizontal de u au point x relativement à la connexion cinétique est l'unique vecteur $v \in T_xM$ orthogonal (relativement à la métrique g) au sous-espace vertical $V_xM = \ker(T_x\pi)$, tel que $T_x\pi(v) = u$. On a alors:

Proposition. *La connexion dynamique est caractérisée par les deux propriétés suivantes.*

1. Pour tout $z \in V^*M$ et tout $u \in T_{\tilde{\pi}(z)}S$, le relèvement horizontal de u au point z relativement à la connexion dynamique a pour projection (par Tq) sur M le relèvement horizontal de u au point $x = q(z)$ relativement à la connexion cinétique.
2. Le relèvement horizontal sur V^*M , relativement à la connexion dynamique, de tout champ de vecteurs Y sur S , est un automorphisme infinitésimal de la structure de Poisson de V^*M , tangent à la section nulle de $q : V^*M \rightarrow M$.

Démonstration. Soit $z \in V^*M$, $u \in T_{\tilde{\pi}(z)}S$. On utilise les coordonnées locales adaptées du paragraphe 4.2. D'après (53), le relèvement horizontal de u au point z a pour expression

$$H(u) = u^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \Theta_{\alpha\beta} g^{\beta i} \frac{\partial}{\partial x^i} - p_j \frac{\partial(\Theta_{\alpha\beta} g^{\beta j})}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right).$$

La projection v de $H(u)$ sur M a pour expression

$$v = u^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \Theta_{\alpha\beta} g^{\beta i} \frac{\partial}{\partial x^i} \right).$$

Soit $w = w^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ un vecteur vertical, élément de $\ker(T_x\pi)$. On a

$$g(v, w) = (g_{ij} \Theta_{\alpha\beta} g^{\beta i} + g_{\alpha j}) u^\alpha w^j.$$

Mais puisque $(g^{ij}, g^{i\beta}, g^{\alpha j}, g^{\alpha\beta})$ est la matrice inverse de $(g_{ij}, g_{i\beta}, g_{\alpha j}, g_{\alpha\beta})$,

$$g_{ij} g^{i\beta} + g_{\lambda j} g^{\lambda\beta} = \delta_j^\beta = 0,$$

d'où l'on déduit, puisque $(\Theta_{\alpha\beta})$ est la matrice inverse de $(g^{\alpha\beta})$,

$$g_{ij} g^{i\beta} \Theta_{\beta\alpha} + g_{\lambda j} g^{\lambda\beta} \Theta_{\beta\alpha} = g_{ij} g^{i\beta} \Theta_{\beta\alpha} + g_{\alpha j} = 0.$$

Compte tenu de la symétrie de g et de Θ , ceci prouve que

$$g(v, w) = 0.$$

Le vecteur v est donc bien le relèvement horizontal de u au point x relativement à la connexion cinétique.

Pour tout champ de vecteurs Y sur S , D_Y est un automorphisme infinitésimal de la structure de Poisson de V^*M . Comme D_0 et X_{K_Y} sont aussi des automorphismes infinitésimaux de cette structure, il en est de même de $H(Y) = D_Y - D_0 + X_{K_Y}$. De plus, l'expression (53) montre que $H(Y)$ est tangent à la section nulle de $q : V^*M \rightarrow M$.

On a donc prouvé que la connexion dynamique vérifie les propriétés 1 et 2. Soit H' l'opérateur de relèvement horizontal relativement à une autre connexion d'Ehresmann sur le fibré $\tilde{\pi} : V^*M \rightarrow S$, vérifiant aussi ces deux propriétés. Pour tout champ de vecteurs Y sur S , $H'(Y) - H(Y)$ est un automorphisme infinitésimal de Poisson tangent aux fibres de $q : V^*M \rightarrow M$. C'est donc un champ de vecteurs localement hamiltonien dont le hamiltonien local n'est fonction que des coordonnées locales (x^i, x^α) sur V^*M , non des coordonnées locales (p_i) . Puisqu'il dépend linéairement de Y , son expression locale est de la forme

$$Y^\alpha \frac{\partial W_\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial p_i},$$

où les W_α sont fonctions des (x^i, x^α) . Mais de plus, $H'(Y) - H(Y)$ doit s'annuler sur la section nulle de $q : V^*M \rightarrow M$. L'expression ci-dessus montre alors qu'il est identiquement nul. \square

8. Quelques exemples

On se propose de montrer dans ce paragraphe que divers systèmes mécaniques à liaisons actives rencontrés en pratique, notamment les exemples cités dans l'introduction, relèvent du formalisme développé dans ce travail.

8.1. Enfant sur une escarpolette.

L'espace de configuration du système est une variété différentiable sur laquelle le cercle T^1 agit librement. Cette action correspond à la rotation en bloc de l'escarpolette et de l'enfant autour de l'axe horizontal de l'escarpolette. La variété différentiable S est l'ensemble des orbites de cette action, et la submersion π est l'application qui, à chaque point de M , associe l'orbite de ce point. La variété S représente l'ensemble des formes possibles du corps de l'enfant et des positions relatives de l'enfant par rapport à l'escarpolette.

On suppose que le centre de masse du système n'est jamais situé sur l'axe de l'escarpolette. Il existe alors une section globale de la submersion $\pi : M \rightarrow S$, qui, à chaque point $s \in S$, fait correspondre le point de $\pi^{-1}(s)$ pour lequel le centre de masse du système est situé le plus bas possible. Cette section permet d'identifier M au produit $T^1 \times S$, la submersion π s'identifiant à la projection sur le second facteur. On utilisera une carte locale quelconque de S et on notera (s^α) les coordonnées locales correspondantes ($2 \leq \alpha \leq$

$m = \dim S + 1$). Les coordonnées locales sur $M = T^1 \times S$ sont donc (θ, s^α) . Elles sont adaptées à la submersion π au sens des paragraphes 3.5 et 4.2. On notera $(\theta, s^\alpha, \omega, v^\alpha)$ les coordonnées locales correspondantes sur TM . Le lagrangien L du système est de la forme (41), avec

$$P(\theta, s) = -D(s) \cos \theta. \quad (54)$$

On posera

$$g_{11}(s) = I(s), \quad g_{1\alpha}(s) = g_{\alpha 1}(s) = J_\alpha(s), \quad (55)$$

d'où l'expression de L

$$L(\theta, s^\alpha, \omega, v^\alpha) = \frac{1}{2}I(s)\omega^2 + J_\alpha(s)\omega v^\alpha + g_{\alpha\beta}(s)v^\alpha v^\beta + D(s) \cos \theta. \quad (56)$$

On remarque que les coefficients $I, J_\alpha, g_{\alpha\beta}$ de la métrique riemannienne g ne dépendent que des variables $s = (s^\alpha)$, non de la variable θ , car le cercle T^1 agit sur M par isométries. Le terme D est lui aussi fonction seulement des variables $s = (s^\alpha)$; il représente le produit de l'accélération de la pesanteur et de la distance du centre de masse du système à l'axe de l'escarpolette.

8.2. Chat en chute libre.

L'espace de configuration est une variété différentiable $M = E \times N$, produit de l'espace euclidien E de dimension 3 et d'une autre variété N . Le facteur E correspond à l'ensemble des positions possibles du centre de masse G du chat dans l'espace, et le facteur N à l'ensemble des formes et des orientations possibles du corps du chat une fois la position du centre de masse fixée. On choisira arbitrairement une origine O dans E afin de pouvoir le considérer comme un espace vectoriel. On notera x_G le vecteur \overrightarrow{OG} , y un point courant de N ; (x_G, y) désigne donc un point courant de M .

Le groupe G des déplacements de l'espace euclidien de dimension 3 agit librement sur M . Ce groupe est produit semi-direct de E (sous-groupe des translations) et de $\mathbf{SO}(3)$ (sous-groupe des rotations). On notera (l, r) , $l \in E, r \in \mathbf{SO}(3)$, un élément de G . L'action de G sur M s'exprime par

$$(l, r).(x_G, y) = (l + r.x_G, \rho(r, y)), \quad (57)$$

où $\rho : \mathbf{SO}(3) \times N \rightarrow N$ est une action libre du groupe des rotations sur la variété N (correspondant à la rotation en bloc du corps du chat autour de son centre de masse).

La variété S est ici l'ensemble des orbites de l'action de $\mathbf{SO}(3)$ sur N : c'est l'ensemble des formes que peut prendre le corps du chat, indépendamment de sa position et de son orientation dans l'espace.

On sait que l'énergie cinétique du système est somme de l'énergie cinétique d'un point matériel de masse m égale à la masse totale, coïncidant avec le centre de masse, et de l'énergie cinétique du mouvement relatif du système par rapport au repère du centre de masse (repère en translation par rapport auquel le centre de masse est fixe). D'autre part, l'énergie potentielle du système dans le champ de pesanteur ne dépend que de la position du centre de masse. Le lagrangien L du système est donc de la forme

$$L = \frac{1}{2}m|\vec{v}_G|^2 - d(x_G) + \frac{1}{2}g_N(v_N, v_N), \quad (58)$$

où d est le produit de l'altitude du centre de masse au dessus d'un plan horizontal de référence, de la masse m du système, et du module de l'accélération de la pesanteur. Le terme $\frac{1}{2}g_N(v_N, v_N)$ est l'énergie cinétique du mouvement relatif du système par rapport au repère du centre de masse; g_N est une métrique riemannienne sur la variété N invariante par l'action ρ de $\mathbf{SO}(3)$, et v_N désigne le vecteur tangent à N représentant la distribution des vitesses relatives du système par rapport au repère du centre de masse.

L'expression du lagrangien L permet de retrouver un résultat bien connu: le système des équations du mouvement se sépare en deux parties, correspondant l'une au mouvement du centre de masse, l'autre au mouvement relatif par rapport au repère du centre de masse. La première partie est

$$m \frac{d^2 \vec{x}_G}{dt^2} + \overrightarrow{\text{grad}} d(x_G) = 0, \quad (59)$$

tandis que la seconde partie est formée par les équations de Lagrange associées au lagrangien

$$L_N = \frac{1}{2} g_N(v_N, v_N). \quad (60)$$

On est ainsi ramené à appliquer la méthode développée au paragraphe 4 au système réduit, dont l'espace de configuration est N et le lagrangien L_N . La projection $\pi : N \rightarrow S$ est maintenant l'application qui associe à chaque point de N son orbite sous l'action ρ du groupe $\mathbf{SO}(3)$.

8.3. Satellite artificiel.

Lorsqu'on suppose les dimensions du satellite petites auprès de son altitude au dessus de la terre, on peut admettre que son énergie potentielle dans le champ attractif terrestre ne dépend que de la position de son centre de masse. On voit alors que le lagrangien L du système est de même forme que celui du chat en chute libre (la fonction $d(x_G)$ ayant cependant une expression différente). Ici encore, le système des équations du mouvement se sépare en une partie correspondant au mouvement du centre de masse et une partie correspondant au mouvement relatif par rapport au repère du centre de masse. Pour ce mouvement relatif, le problème du satellite artificiel à liaisons actives est donc équivalent au problème du chat en chute libre.

8.4. Anneau sur un cerceau.

Dans les trois exemples dont l'étude est esquissée ci-dessus, la fonction K_Y , définie par l'équation (51), est constante sur chaque feuille symplectique de V^*M . Par suite, le terme $-X_{K_Y}$ qui apparaît dans la décomposition (52) du champ de vecteurs dynamique en somme de trois termes, est identiquement nul. On va donner un exemple, précédemment étudié par Aharonov et Anandan [2], dans lequel X_{K_Y} est non nul.

Le système considéré est constitué par un cerceau (tige mince rigide formant une courbe fermée plane différentiable, pas nécessairement circulaire) sur lequel est enfilé un anneau. Cet anneau, de dimensions négligeables, est assimilé à un point matériel P de masse m ; il peut coulisser sans frottement sur le cerceau. L'opérateur contrôle la position du cerceau dans un plan (qu'on supposera horizontal, pour que la pesanteur n'intervienne

pas dans le problème), mais non la position de l'anneau sur le cerceau. Pour simplifier, on supposera que l'ensemble des positions possibles du cerceau dépend d'un seul paramètre: l'opérateur peut faire tourner ce cerceau en bloc autour d'un point O de son plan. On supposera le cerceau de forme étoilée autour de O (cela signifie que toute demi-droite du plan issue de O coupe le cerceau en un point unique, l'intersection étant transverse). On choisit un point A lié au cerceau, et une orientation du plan, ce qui permet de repérer la configuration du système au moyen de deux paramètres:

- l'angle $\theta = (OA, OP)$,
- l'angle β que fait OA avec une direction de référence.

La variété de configuration M est donc un tore de dimension 2, et la variété S un tore de dimension 1. La projection $\pi : M \rightarrow S$ s'exprime par $(\theta, \beta) \mapsto \beta$. On remarque que S est, comme dans les exemples précédents, l'ensemble des orbites d'une action d'un groupe sur M . Dans le cas présent, le groupe qui agit est le cercle; mais cette action ne correspond pas, comme dans les exemples précédents, à la rotation en bloc du système autour d'un axe ou d'un point; elle correspond plutôt au déplacement de l'anneau P le long du cerceau.

En pratique, pour repérer la position de P sur le cerceau, il est plus commode d'utiliser, plutôt que l'angle θ , l'abscisse curviligne ξ de P à partir de l'origine A . On doit considérer ξ comme définie modulo l (longueur du cerceau). L'angle θ est une fonction différentiable de ξ dont la dérivée ne s'annule en aucun point. La distance $r = OP$ est aussi une fonction différentiable de ξ , à valeurs strictement positives.

Le lagrangien L du système a pour expression

$$L = \frac{1}{2}m(r'^2\xi^2 + r^2(\theta'\xi + \dot{\beta})^2) + \frac{1}{2}I\dot{\beta}^2. \quad (61)$$

On a noté (ξ, β) les coordonnées locales sur M , $(\xi, \beta, \dot{\xi}, \dot{\beta})$ les coordonnées locales correspondantes sur TM , r' et θ' les dérivées, respectivement de r et de θ , par rapport à ξ , m la masse de P et I le moment d'inertie du cerceau par rapport au point O . On vérifie d'ailleurs que I n'apparaît pas dans les équations finales, ce qui est en accord avec le fait que l'opérateur impose la position du cerceau; on ne l'a introduit que pour rendre le lagrangien hyper-régulier.

Le hamiltonien H du système a pour expression

$$H = \frac{1}{2(I + mr^2r'^2)} \left(\frac{I + mr^2}{m} p_\xi^2 - 2r^2\theta' p_\xi p_\beta + p_\beta^2 \right), \quad (62)$$

où on a noté $(\xi, \beta, p_\xi, p_\beta)$ les coordonnées locales sur T^*M associées aux coordonnées locales (ξ, β) sur M .

Conformément aux hypothèses et notations du paragraphe 7, on suppose que l'opérateur contrôle le mouvement du cerceau de manière telle que l'évolution de l'angle β en fonction du temps soit une courbe intégrale de l'équation différentielle

$$\frac{d\beta}{dt} = Y(\beta(t)).$$

La fonction K_Y définie par (51) a pour expression

$$K_Y(\xi, \beta) = \frac{1}{2}(I + mr^2r'^2)(Y(\beta))^2. \quad (63)$$

Les équations du mouvement s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{d\xi(t)}{dt} &= \frac{1}{m}p_\xi - r^2\theta'Y(\beta(t)), \\ \frac{dp_\xi(t)}{dt} &= (r^2\theta')'p_\xi Y(\beta(t)) + \frac{m}{2}(r^2r'^2)'(Y(\beta(t)))^2, \end{aligned} \quad (64)$$

où on a noté ' la dérivation par rapport à ξ . Les trois termes de la décomposition (52) du champ de vecteurs dynamique D_Y sur V^*M sont donc:

$$D_0 = \frac{1}{m}p_\xi \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad (65)$$

$$H(Y) = Y(\beta) \left(\frac{\partial}{\partial \beta} - r^2\theta' \frac{\partial}{\partial \xi} + (r^2\theta')'p_\xi \frac{\partial}{\partial p_\xi} \right), \quad (66)$$

$$-X_{K_Y} = \frac{m}{2}(r^2r'^2)'(Y(\beta))^2 \frac{\partial}{\partial p_\xi}. \quad (67)$$

On remarque que p_ξ est le produit par m de la mesure de la projection orthogonale de la vitesse absolue de l'anneau sur la tangente au cerceau, et que K_Y est la somme de l'énergie cinétique du cerceau et de la partie de l'énergie cinétique de l'anneau associée à la composante normale au cerceau de sa vitesse.

Références bibliographiques

1. R. Abraham and J. E. Marsden, *Foundations of mechanics*, Benjamin, Reading, 1978.
2. Y. Aarhonov and J. Anandan, Phase change during quantum evolution, *Phys. Rev. Letters* 58, 1987, 1593–1596.
3. V. I. Arnold, V. V. Kozlov and A. I. Neishtadt, Mathematical aspects of classical and celestial mechanics, in *Dynamical systems III* (V. I. Arnold, ed.), Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1988.
4. F. Cardin and G. Zanzotto, On constrained mechanical systems: d'Alembert's and Gauss' principles, *J. Math. Phys.* 30 (7), July 1989, p. 1473–1479.
5. C. Ehresmann, Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable, *Colloque de Topologie, Bruxelles, 1950*, p. 29–55, Masson, Paris, 1950.
6. C. Godbillon, *Géométrie différentielle et mécanique analytique*, Hermann, Paris, 1969.
7. D. Holm, communication privée.
8. P. Libermann and C.-M. Marle, *Symplectic geometry and analytical mechanics*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1987.
9. A. Lichnerowicz, La géométrie des transformations canoniques, *Bull. Soc. Math. de Belgique* 31, 1979, 105–135.

10. C.-M. Marle, Contact manifolds, canonical manifolds and the Hamilton-Jacobi method in analytical mechanics, Proc. IUTAM-ISIMM Symposium on *Modern developments in analytical mechanics* (S. Benenti, M. Francaviglia and A. Lichnerowicz, ed.), 255–277. Acta Academiae Scientiarum Taurinensis, Torino, Italy, 1983.
11. C.-M. Marle, Sur la géométrie des systèmes mécaniques à liaisons actives, *à paraître*.
12. J. Marsden, R. Montgomery and T. Ratiu, Reduction, symmetry and Berry's phase in mechanics, *Preprint* (95 pages), December 1988.
13. R. Montgomery, The connection whose holonomy is the classical adiabatic angles of Hannay and Berry and its generalization to the non-integrable case, *Commun. Math. Phys.* 120, 1988, p. 269–294.
14. R. Montgomery, Isoholonomic problems and some applications, *Commun. Math. Phys.* 128, 1990, p. 565–590.
15. J.-M. Souriau, *Géométrie et relativité*, Hermann, Paris, 1964.
16. J.-M. Souriau, *Structure des systèmes dynamiques*, Dunod, Paris, 1969.
17. W. M. Tulczyjew, Sur la différentielle de Lagrange, *C. R. Acad. Sc. Paris*, 280, A, 1975, 1295–1298.
18. E. T. Whittaker, *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies*, Cambridge University Press, Cambridge, 1904 (fourth edition 1937, reissued with Foreword 1988).
19. N. Woodhouse, *Geometric quantization*, Oxford University Press, Oxford, 1980.