

UNE PREUVE ÉLÉMENTAIRE DE LA SIMPLE CONNEXITÉ DE L'INTÉRIEUR D'UNE COURBE DE JORDAN

par Charles-Michel MARLE

RÉSUMÉ. On propose une preuve élémentaire de la simple connexité de l'intérieur d'une courbe de Jordan, ne faisant pas usage de la théorie de l'homologie. On montre aussi, de manière élémentaire, que l'intérieur d'une courbe de Jordan vérifie la propriété de Schoenflies. En utilisant le théorème de représentation conforme de Riemann et le théorème de Carathéodory-Schoenflies, on peut donc prouver, de manière élémentaire, que l'adhérence de l'intérieur d'une courbe de Jordan est homéomorphe au disque unité fermé.

1. INTRODUCTION

Dans tout ce qui suit, nous appellerons *plan* un espace affine réel de dimension 2. Une *courbe de Jordan* dans un plan \mathcal{E}^2 est l'image $C = \varphi(S^1)$ du cercle S^1 par une application continue et injective φ de S^1 dans \mathcal{E}^2 . D'après un célèbre théorème de Jordan, le complémentaire d'une courbe de Jordan C dans un plan \mathcal{E}^2 a exactement deux composantes connexes, toutes deux ouvertes, dont une seule est non bornée; chacune de ces composantes connexes a pour frontière la courbe C . La composante connexe non bornée est appelée *extérieur* de C et notée $\text{Ext}(C)$; la composante connexe bornée est appelée *intérieur* de C et notée $\text{Int}(C)$. Une preuve relativement élémentaire de ce théorème figure dans les livres de J. Dieudonné [1] et J. Dugundji [2].

La théorie de l'homologie permet aisément de montrer que l'intérieur d'une courbe de Jordan, dans un plan \mathcal{E}^2 , est un ouvert simplement connexe de \mathcal{E}^2 . Nous proposons dans ce qui suit une preuve élémentaire de ce résultat. Nous montrerons aussi, de manière élémentaire, que l'intérieur d'une courbe de Jordan possède la propriété de Schoenflies (rappelée plus

loin). D'après le théorème de représentation conforme de Riemann, tout ouvert simplement connexe U du plan complexe \mathbb{C} , non égal à \mathbb{C} , est analytiquement difféomorphe au disque unité ouvert D de \mathbb{C} (de centre l'origine et de rayon 1); rappelons aussi (théorème de Carathéodory-Schoenflies) que tout difféomorphisme analytique d'un ouvert borné U de \mathbb{C} sur le disque unité D se prolonge en un homéomorphisme de l'adhérence \overline{U} de U sur le disque fermé \overline{D} , si et seulement si tout point de la frontière de U vérifie la propriété de Schoenflies. Le lecteur trouvera une preuve relativement élémentaire de ces résultats dans l'ouvrage de M. Hervé [3]. En rassemblant ces résultats, on conclut que l'adhérence de l'intérieur d'une courbe de Jordan est homéomorphe au disque unité fermé \overline{D} , et on voit que ce fait peut être prouvé par des moyens élémentaires ne faisant pas appel à la théorie de l'homologie.

Rappelons une définition et un théorème qui seront utilisés plus loin.

DÉFINITION. Soient A une partie non vide d'un plan \mathcal{E}^2 , x et y deux points de $\mathcal{E}^2 - A$. On dit que A *sépare* les points x et y si ces points appartiennent à deux composantes connexes distinctes de $\mathcal{E}^2 - A$.

THÉORÈME DE JANISZEWSKI. *Soient A et B deux parties compactes non vides d'un plan \mathcal{E}^2 , x et y deux points distincts de $\mathcal{E}^2 - (A \cup B)$. On suppose que A ne sépare pas x et y , que B ne sépare pas x et y et que $A \cap B$ est connexe. Alors $A \cup B$ ne sépare pas x et y .*

Une preuve élémentaire de ce théorème figure dans les livres de J. Dieudonné [1] et J. Dugundji [2].

2. LA PROPRIÉTÉ DE SCHOENFLIES

DÉFINITION. Soit U un ouvert d'un plan \mathcal{E}^2 . On munit ce plan d'une structure euclidienne. On dit qu'un point z de la frontière de U vérifie la *propriété de Schoenflies* si, pour tout réel $R > 0$, il existe un réel $r > 0$ ayant la propriété suivante: soient z_1 et z_2 deux points de l'intersection de U et du disque ouvert de centre z et de rayon r ; alors il existe un arc de courbe continu qui joint les points z_1 et z_2 , et qui est contenu dans l'intersection de U et du disque ouvert de centre z et de rayon R .

Il est facile de vérifier que le fait, pour un point de la frontière d'un ouvert d'un plan \mathcal{E}^2 , de vérifier ou de ne pas vérifier la propriété de Schoenflies, ne dépend pas du choix de la structure euclidienne dont on munit ce plan.

Donnons un exemple d'ouvert d'un plan dont la frontière comporte des points qui ne vérifient pas la propriété de Schoenflies. L'ensemble

$$\{ z = r \exp(i\theta) \in \mathbb{C}; 0 < r < 1, 0 < \theta < 2\pi \}$$

est un ouvert du plan complexe \mathbb{C} , ayant pour frontière la réunion du cercle trigonométrique et du segment de droite $[0, 1]$ de l'axe réel. Le point 1, élément de cette frontière, ne vérifie pas la propriété de Schoenflies.

PROPOSITION 1. *Soit C une courbe de Jordan dans un plan \mathcal{E}^2 . L'intérieur $\text{Int}(C)$ de C est un ouvert borné et connexe de \mathcal{E}^2 , et tout point de la frontière C de $\text{Int}(C)$ vérifie la propriété de Schoenflies.*

Preuve: Nous savons déjà (théorème de Jordan) que $\text{Int}(C)$ est un ouvert borné et connexe de \mathcal{E}^2 dont la frontière est C . Munissons \mathcal{E}^2 d'une structure euclidienne. Soit z un point de C et R un réel strictement positif. Nous pouvons, en diminuant si nécessaire la valeur de R , faire en sorte que la courbe C ne soit pas entièrement contenue dans le disque fermé de centre z et de rayon R . Soit $\varphi : S^1 \rightarrow C$ une paramétrisation de C . En modifiant si nécessaire l'origine des arcs nous pouvons faire en sorte que $\varphi(1) = z$. Posons

$$s_1 = \inf \{ s \in]-\infty, 0[; \forall t \in [s, 0], \|\varphi(\exp(it)) - z\| < R \},$$

$$s_2 = \sup \{ s \in]0, +\infty[; \forall t \in [0, s], \|\varphi(\exp(it)) - z\| < R \}.$$

Les points $p = \varphi(\exp(is_1))$ et $q = \varphi(\exp(is_2))$ appartiennent à l'intersection de la courbe C et du cercle de centre z et de rayon R . Posons

$$C_1 = \{ \varphi(\exp(is)); s_1 < s < s_2 \}, \quad C_2 = C - \overline{C_1}.$$

Nous voyons que C_1 et C_2 sont les deux arcs ouverts (c'est-à-dire ne contenant pas leurs extrémités) de la courbe C ayant pour extrémités les points p et q , C_1 étant celui de ces deux arcs qui contient le point z . L'adhérence de C_2 est $\overline{C_2} = C_2 \cup \{p, q\}$. C'est un fermé qui ne contient pas z . Il existe donc un réel r vérifiant

$$0 < r < d(z, \overline{C_2}).$$

L'arc C_1 est contenu dans le disque ouvert de centre z et de rayon R , et l'arc C_2 est extérieur au disque de centre z et de rayon r (voir figure 1).

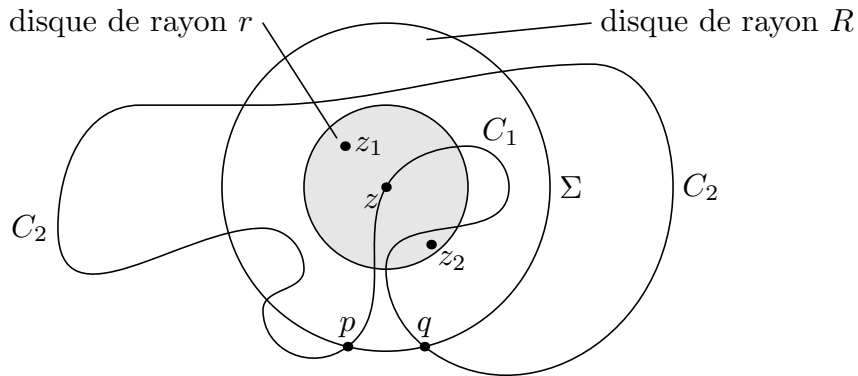


FIGURE 1

Illustration de la preuve de la proposition 1

Soient z_1 et z_2 deux points distincts de l'intersection de $\text{Int}(C)$ avec le disque ouvert de centre z et de rayon r . Soit Σ le cercle de centre z et de rayon R . Le compact $\Sigma \cup C_2$ ne sépare pas z_1 et z_2 , car ce compact ne rencontre pas le disque de centre z et de rayon r , qui est connexe et contient les points z_1 et z_2 . Par hypothèse, la courbe C , qui est compacte, ne sépare pas z_1 et z_2 . L'intersection $(\Sigma \cup C_2) \cap C$ est l'adhérence $\overline{C_2}$ de C_2 , qui est connexe. Le théorème de Janiszewski montre alors que $(\Sigma \cup C_2) \cup C$ ne sépare pas z_1 et z_2 . Puisque $C_2 \subset C$, $(\Sigma \cup C_2) \cup C = \Sigma \cup C$, et nous avons prouvé que $\Sigma \cup C$ ne sépare pas z_1 et z_2 . La composante connexe du complémentaire de $\Sigma \cup C$ dans \mathcal{E}^2 qui contient ces deux points est un ouvert connexe de \mathcal{E}^2 , donc est connexe par arcs. C'est pourquoi il existe un arc de courbe continu joignant z_1 à z_2 contenu dans l'intersection de $\text{Int } C$ et du disque ouvert de centre z et de rayon R . \square

3. SIMPLE CONNEXITÉ DE L'INTÉRIEUR D'UNE COURBE DE JORDAN

Rappelons qu'un ouvert U d'un plan \mathcal{E}^2 est dit *simplement connexe* si toute application continue de S^1 dans U est homotope (dans U) à une application constante. Nous allons dans ce paragraphe donner une preuve élémentaire de la proposition suivante.

PROPOSITION 2. *Soit C une courbe de Jordan dans un plan \mathcal{E}^2 . L'intérieur $\text{Int}(C)$ de cette courbe est un ouvert simplement connexe.*

La preuve de cette proposition utilise les définitions et les quatre lemmes qui suivent.

DÉFINITIONS. Soient F , F_1 et F_2 des parties fermées non vides d'un plan \mathcal{E}^2 .

1. On suppose $F_1 \supset F_2$. On dit que F_2 est un *rétracte par déformation* de F_1 s'il existe une application continue $g : F_1 \times [0, 1] \rightarrow F_1$ vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) pour tout $x \in F_1$, $g(x, 0) = x$;
- (ii) pour tout $y \in F_2$ et tout $t \in [0, 1]$, $g(y, t) = y$;
- (iii) pour tout $x \in F_1$, $g(x, 1) \in F_2$.

Une application g ayant ces propriétés est appelée *rétraction par déformation* de F_1 sur F_2 .

2. On dit que F est *contractible* s'il existe un point a de F tel que le singleton $\{a\}$ soit un rétracte par déformation de F .

LEMME 1. *Soient F_1 , F_2 et F_3 trois parties fermées non vides d'un plan \mathcal{E}^2 telles que $F_1 \supset F_2 \supset F_3$. On suppose que F_2 est un rétracte par déformation de F_1 et que F_3 est un rétracte par déformation de F_2 . Alors F_3 est un rétracte par déformation de F_1 .*

Preuve : Soient $g : F_1 \times [0, 1] \rightarrow F_1$ une rétraction par déformation de F_1 sur F_2 et $h : F_2 \times [0, 1] \rightarrow F_2$ une rétraction par déformation de F_2 sur F_3 . Posons, pour tout $x \in F_1$ et tout $t \in [0, 1]$,

$$k(x, t) = \begin{cases} g(x, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2, \\ h(g(x, 1), 2t - 1) & \text{si } 1/2 < t \leq 1. \end{cases}$$

L'application $k : F_1 \times [0, 1] \rightarrow F_1$ ainsi définie est continue. Il est facile de vérifier que c'est une rétraction par déformation de F_1 sur F_3 . \square

LEMME 2. *Soit X un espace topologique, U un ouvert d'un plan \mathcal{E}^2 et $f : X \rightarrow U$ une application continue. Si $f(X)$ est contenu dans une partie F , fermée et contractible, de l'ouvert U , l'application f est homotope (dans U) à une application constante.*

Preuve: Soit $g : F \times [0, 1] \rightarrow F$ une rétraction par déformation de F sur un singleton $\{a\}$ dont l'unique élément est un point a de F . Posons, pour tout $x \in X$ et tout $t \in [0, 1]$,

$$h(x, t) = g(f(x), t).$$

L'application $h : X \times [0, 1] \rightarrow U$ ainsi définie est une homotopie de f à l'application constante $x \mapsto a$. \square

LEMME 3. Dans le plan \mathbb{R}^2 , soit F le carré

$$F = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 \}.$$

Chacune des parties fermées suivantes du carré F est un rétracte par déformation de F :

(i) un de ses côtés, par exemple

$$F_1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, \quad y = 0 \};$$

(ii) la réunion de deux de ses côtés adjacents, par exemple

$$F_2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, \quad y = 0 \} \\ \cup \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; x = 0, \quad 0 \leq y \leq 1 \};$$

(iii) la réunion de trois de ses côtés, par exemple

$$F_3 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, \quad y = 0 \} \\ \cup \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; x = 0, \quad 0 \leq y \leq 1 \} \\ \cup \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; x = 1, \quad 0 \leq y \leq 1 \};$$

(iv) le singleton formé par un de ses points, par exemple son centre :

$$F_4 = \{ (1/2, 1/2) \}.$$

Preuve: Pour construire une rétraction par déformation du carré F sur une de ses parties fermées F_i (avec $1 \leq i \leq 4$), on utilise une application continue et surjective $f_i : F \rightarrow F_i$, dont la restriction à F_i est l'application identique, puis on pose, pour tout point $z \in F$ et tout $t \in [0, 1]$:

$$g_i(z, t) = (1 - t)z + tf_i(z).$$

Pour application $f_1 : F \rightarrow F_1$, on peut utiliser la projection parallèlement à l'axe des ordonnées, $(x, y) \mapsto (x, 0)$. Pour application $f_4 : F \rightarrow F_4$, on prend l'application constante $(x, y) \mapsto (1/2, 1/2)$. Pour application $f_2 : F \rightarrow F_2$, on peut prendre, par exemple, la projection parallèlement à la première bissectrice, et pour application $f_3 : F \rightarrow F_3$, la projection de centre $(1/2, 2)$. \square

Le lemme 4 ci-dessous est l'ingrédient essentiel de la preuve de la proposition 2.

LEMME 4. *Dans le plan \mathbb{R}^2 , soit J une courbe de Jordan formée d'un nombre fini de segments de droite parallèles soit à l'axe des abscisses, soit à l'axe des ordonnées, tous de longueur 1, mis bout à bout. L'adhérence F de l'intérieur de cette courbe est une partie fermée contractible de \mathbb{R}^2 .*

Preuve: En effectuant si nécessaire une translation, nous pouvons supposer que les segments de droite dont la courbe J est la réunion sont définis par les équations et inéquations :

- $k \leq x \leq k + 1$ et $y = l$, avec k et $l \in \mathbb{Z}$, si le segment considéré est parallèle à l'axe des abscisses,
- $x = k$ et $l \leq y \leq l + 1$, avec k et $l \in \mathbb{Z}$, si le segment considéré est parallèle à l'axe des ordonnées.

L'adhérence $F = J \cup \text{Int}(J)$ de l'intérieur de la courbe de Jordan J est réunion d'une famille finie, notée \mathcal{C} , de carrés de la forme

$$\Delta_{k,l} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; k \leq x \leq k + 1, l \leq y \leq l + 1 \}$$

avec k et $l \in \mathbb{Z}$. La figure 2 indique schématiquement, sur un exemple, l'allure de F et de sa frontière J .

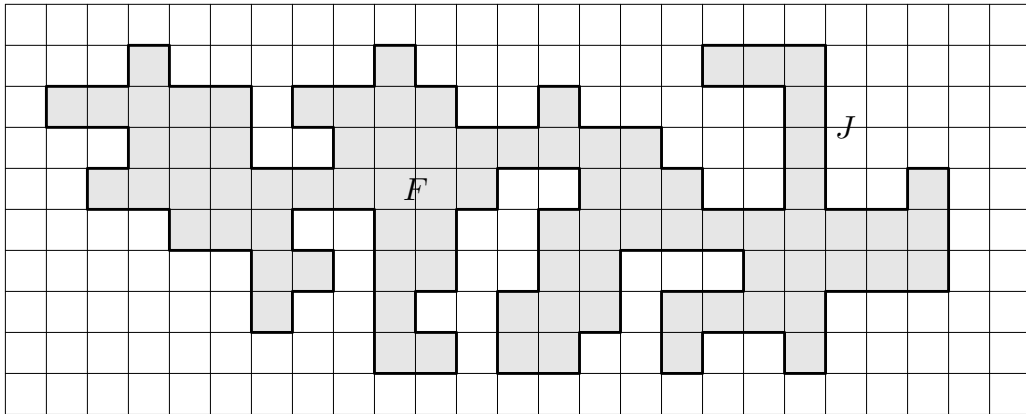


FIGURE 2

Exemple de compact F , en gris, et de sa frontière J , en traits forts

Si la famille \mathcal{C} a un seul élément, F est un carré de la forme $\Delta_{k,l}$. Le lemme 3 montre alors que F est contractible, et la démonstration est terminée.

Nous supposons dans la suite que \mathcal{C} a plus d'un élément. Nous allons prouver qu'il existe un élément Δ_1 de \mathcal{C} tel que la réunion de la famille \mathcal{C} privée de cet élément soit un fermé F_1 ayant les propriétés suivantes :

- la frontière J_1 de F_1 est une courbe de Jordan formée par des segments de droite de longueur 1 mis bout à bout, parallèles à un des axes de coordonnées, dont les extrémités sont des points de coordonnées entières ;
- le fermé F_1 est la réunion de la courbe de Jordan J_1 et de son intérieur ;
- le fermé F_1 est contenu dans F et est un rétracte par déformation de F .

Une fois ce résultat acquis, la fin de la preuve du lemme 4 est facile. En effet, si F_1 se réduit à un seul carré de la forme $\Delta_{k,l}$, le lemme 3 montre qu'il est contractible, et le lemme 1 montre que F est contractible. Dans le cas contraire, il suffit de recommencer toute la construction effectuée précédemment en remplaçant F par F_1 afin de construire F_2 , puis par F_2 afin de construire F_3 , et ainsi de suite. Après un nombre fini d'étapes (égal au nombre n d'éléments de \mathcal{C} diminué d'une unité) nous aurons construit une famille de fermés

$$F = F_0 \supset F_1 \supset \dots \supset F_{n-1},$$

chacun des F_i (avec $1 \leq i \leq n-1$) étant un rétracte par déformation de F_{i-1} , et F_{n-1} étant un carré de la forme $\Delta_{k,l}$, contractible sur son centre d'après le lemme 3. Une application répétée du lemme 1 montre que F est contractible.

Il nous reste donc seulement à prouver l'existence d'un élément particulier Δ_1 de \mathcal{C} ayant les propriétés indiquées. Cette preuve se décompose en trois parties.

Première partie : existence de Δ_1 . Soit n le nombre d'éléments de \mathcal{C} . Nous avons déjà réglé le cas où $n = 1$; nous supposons donc $n \geq 2$. Soit $\Delta_n = \Delta_{k_n, l_n}$ un élément particulier de \mathcal{C} . Nous allons affecter à chaque élément $\Delta_{k,l}$ de \mathcal{C} un nombre entier $p(\Delta_{k,l}) \geq 0$. Pour cela, nous remarquons que les centres des carrés Δ_n et $\Delta_{k,l}$ peuvent être joints, en général de plusieurs façons, par un chemin continu contenu dans F , formé par des segments de droite de longueur 1 mis bout à bout, ces segments ayant pour extrémités les centres de deux carrés adjacents (c'est-à-dire ayant un côté commun). Nous noterons $\mathcal{P}(\Delta_n, \Delta_{k,l})$ l'ensemble de ces chemins. La figure 3 présente un exemple de chemin de ce type.

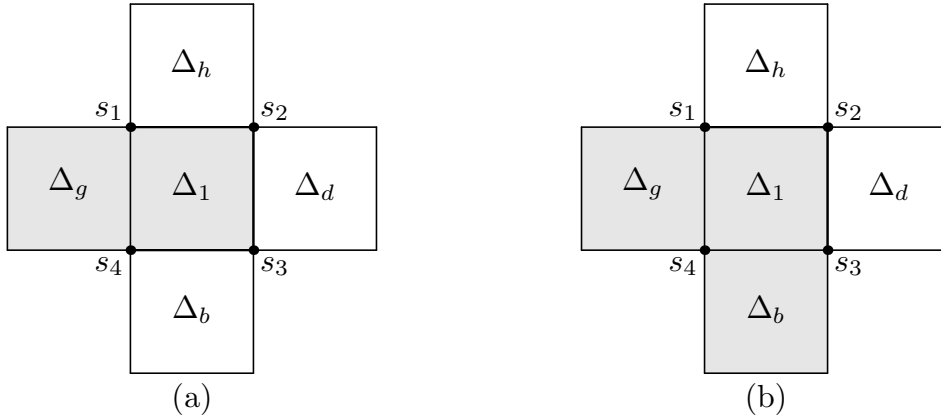


FIGURE 4

Le carré Δ_1 et ses voisins

de \mathcal{C} . Il est alors facile de voir que

$$p(\Delta_g) = p(\Delta_d) = p(\Delta_1) - 1. \quad (**)$$

En effet, l'inégalité (*) montre que $p(\Delta_g)$ et $p(\Delta_d)$ sont inférieurs ou égaux à $p(\Delta_1)$. Comme d'autre part les entiers $p(\Delta_g)$ et $p(\Delta_d)$ sont de parité opposée à celle de $p(\Delta_1)$, ils sont nécessairement inférieurs ou égaux à $p(\Delta_1) - 1$. Si l'un d'eux était strictement inférieur à $p(\Delta_1) - 1$, il existerait un chemin, élément de $\mathcal{P}(\Delta_n, \Delta_1)$, de longueur strictement inférieure à $p(\Delta_1)$, ce qui contredirait la définition de $p(\Delta_1)$. La double égalité (**) ci-dessus est donc prouvée. Par suite, il existe un chemin Γ_g , élément de $\mathcal{P}(\Delta_n, \Delta_g)$, et un chemin Γ_d , élément de $\mathcal{P}(\Delta_n, \Delta_d)$, tous deux de longueur $p(\Delta_1) - 1$, joignant le centre de Δ_n , respectivement, au centre de Δ_g et au centre de Δ_d . Ces deux chemins ne rencontrent le segment de droite qui joint les centres de Δ_g et de Δ_d qu'en leur extrémité, car le cas contraire serait en contradiction avec l'inégalité (*). Les deux chemins Γ_g et Γ_d peuvent se rencontrer en d'autres points que le centre de Δ_n ; si c'est le cas, la longueur entre deux points de rencontre consécutifs de ces deux chemins est nécessairement la même sur ces deux chemins, puisque tous deux sont, parmi les chemins éléments de $\mathcal{P}(\Delta_n, \Delta_g)$ et $\mathcal{P}(\Delta_n, \Delta_d)$, les plus courts possibles. Soit c le dernier point de rencontre de ces deux chemins, en partant du centre de Δ_n . Soit Γ'_g et Γ'_d les chemins obtenus en ne gardant de Γ_g que la partie qui va de c au centre de Δ_g , et de Γ_d que la partie qui va de c au centre de Δ_d . Ces deux chemins n'ont en commun que le point c , et ils ne rencontrent le segment joignant les

centres de Δ_g et de Δ_d qu'en leur extrémité autre que c . La réunion J' de ces deux chemins et du segment de droite joignant les centres de Δ_g et de Δ_d est donc une courbe de Jordan, contenue dans l'intérieur de J . La droite passant par le centre du carré Δ_1 parallèle à l'axe des ordonnées coupe transversalement cette courbe au centre de Δ_1 , donc entre, par ce point, à l'intérieur de J' . Comme l'intérieur de J' est borné, cette droite ressort nécessairement de l'intérieur de J' par un autre point, que nous notons d , situé sur J' , et tel que le segment de droite ouvert (c'est-à-dire ne contenant pas ses extrémités) joignant d au centre de Δ_1 soit contenu dans l'intérieur de J' , donc *a fortiori* dans l'intérieur de J . Le chemin formé par la réunion de la partie de Γ_d allant du centre de Δ_n au point d et du segment de droite fermé joignant le point d au centre de Δ_1 est élément de $\mathcal{P}(\Delta_n, \Delta_1)$. Sa longueur est strictement inférieure à $p(\Delta_n)$ (et même à $p(\Delta_n) - 1$). Ceci étant en contradiction avec la définition de $p(\Delta_1)$, nous avons prouvé qu'un des côtés $[s_2, s_3]$ et $[s_4, s_1]$ au moins est contenu dans J .

Troisième partie : J_1 est une courbe de Jordan. Posons

$$\mathcal{C}_1 = \mathcal{C} - \{\Delta_1\}, \quad F_1 = \bigcup_{\Delta_{k,l} \in \mathcal{C}_1} \Delta_{k,l},$$

et notons J_1 la frontière de F_1 . Nous voyons aisément que F_1 est un fermé contenu dans F , dont la frontière J_1 est une réunion de segments de droite de longueur 1 parallèles à un des axes de coordonnées, les extrémités de ces segments étant des points de coordonnées entières. Nous devons prouver que J_1 est une courbe de Jordan et que F_1 est un rétracte par déformation de F .

Nous venons de voir que deux côtés adjacents du carré Δ_1 , au moins, sont contenus dans J . Trois de ces côtés au plus peuvent être contenus dans J , car si les quatre côtés de ce carré l'étaient, F se réduirait à Δ_1 , contrairement à notre hypothèse. Deux cas sont donc possibles : celui où trois des côtés de Δ_1 sont contenus dans J , le quatrième côté ne l'étant pas, et celui où deux côtés adjacents de ce carré sont contenus dans J , les deux autres côtés ne l'étant pas. Nous allons considérer successivement ces deux cas.

Supposons que trois des côtés du carré Δ_1 soient contenus dans J , par exemple les côtés $[s_1, s_2]$, $[s_2, s_3]$ et $[s_3, s_4]$, le quatrième côté $[s_4, s_1]$ ne l'étant pas (figure 4 a). Nous voyons alors que J_1 s'obtient à partir de J en remplaçant la ligne brisée formée par la réunion des côtés $[s_1, s_2]$, $[s_2, s_3]$

et $[s_3, s_4]$ par le côté $[s_4, s_1]$. Par suite, J_1 est bien une courbe de Jordan et F_1 est bien la réunion de J_1 et de son intérieur. Par ailleurs, le lemme 3 montre qu'il existe une rétraction par déformation $g : \Delta_1 \times [0, 1] \rightarrow \Delta_1$ de Δ_1 sur son côté $[s_4, s_1]$. Posons alors, pour tout $z \in F$ et tout $t \in [0, 1]$,

$$\tilde{g}(z, t) = \begin{cases} g(z, t) & \text{si } z \in \Delta_1, \\ z & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi définie, l'application \tilde{g} est une rétraction par déformation de F sur F_1 .

Supposons maintenant que deux côtés adjacents de Δ_1 soient contenus dans J , par exemple les côtés $[s_1, s_2]$ et $[s_2, s_3]$, les deux autres côtés ne l'étant pas (figure 4 b). Nous voyons alors que J_1 s'obtient à partir de J en remplaçant la ligne brisée formée par la réunion des côtés $[s_1, s_2]$ et $[s_2, s_3]$ par la ligne brisée formée par la réunion des côtés $[s_3, s_4]$ et $[s_4, s_1]$. Si le sommet s_4 est élément de J , ce point est un point double de la courbe J_1 , qui n'est plus une courbe de Jordan. Dans le cas contraire, J_1 est bien une courbe de Jordan, F_1 est bien réunion de cette courbe et de son intérieur et, en procédant comme ci-dessus, nous pouvons montrer qu'il existe une rétraction par déformation de F sur F_1 . Il nous reste donc à prouver que le sommet s_4 n'est pas élément de J . Supposons le contraire. Les carrés Δ_g et Δ_b sont éléments de \mathcal{C} , car leurs côtés $[s_4, s_1]$ et $[s_3, s_4]$ ne sont pas contenus dans J . Un raisonnement analogue à celui fait pour prouver la double égalité (***) permet de prouver que

$$p(\Delta_g) = p(\Delta_b) = p(\Delta_1) - 1. \quad (***)$$

Il existe donc un chemin $\Gamma_g \in \mathcal{P}(\Delta_n, \Delta_g)$ et un chemin $\Gamma_b \in \mathcal{P}(\Delta_n, \Delta_b)$, tous deux de longueur $p(\Delta_1) - 1$. En procédant comme lors de la construction de la courbe de Jordan J' , on montre qu'en réunissant une partie de ces chemins, le segment de droite joignant les centres de Δ_g et de Δ_1 , et le segment de droite joignant les centres de Δ_b et de Δ_1 , on forme une courbe de Jordan J'' contenue dans l'intérieur de J . La diagonale du carré Δ_1 qui joint les sommets s_2 et s_4 traverse la courbe de Jordan J'' au centre du carré Δ_1 donc passe, en ce point, de l'extérieur à l'intérieur de J'' (ou inversement). Les sommets s_2 et s_4 ne peuvent donc pas être tous les deux éléments de l'extérieur de J'' . Comme le sommet s_2 est élément de J , il est aussi élément de l'extérieur de J'' . Par suite, le point s_4 est élément de l'intérieur de J'' , donc *a fortiori* élément de l'intérieur de J . Nous avons bien prouvé que s_4 n'est pas élément de J . \square

Preuve de la proposition 2: Soit $\gamma : S^1 \rightarrow \text{Int}(C)$ une application continue du cercle S^1 dans l'intérieur de la courbe C . Nous allons prouver que $\gamma(S^1)$ est contenu dans une partie fermée contractible de $\text{Int}(C)$, de la forme considérée dans le lemme 4. Le lemme 2 montrera alors que γ est homotope à une application constante. La démonstration comporte plusieurs étapes.

Première étape: construction d'un fermé F contenant $\gamma(S^1)$. L'image $\gamma(S^1)$ de l'application γ et la courbe C sont deux parties compactes disjointes de \mathcal{E}^2 , dont la distance (pour toute structure euclidienne sur \mathcal{E}^2) est strictement positive. Nous pouvons donc identifier \mathcal{E}^2 avec le plan \mathbb{R}^2 muni de sa structure euclidienne usuelle, au moyen d'un isomorphisme affine, de manière telle que la distance de $\gamma(S^1)$ à C soit supérieure à 2. Nous raisonnerons désormais en considérant C et $\gamma(S^1)$ comme des parties de \mathbb{R}^2 . Considérons alors le quadrillage du plan \mathbb{R}^2 formé par les droites, parallèles aux axes de coordonnées, d'abscisses ou d'ordonnées entières. Pour tout couple $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$, posons

$$\Delta_{k,l} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; k \leq x \leq k+1, l \leq y \leq l+1 \}.$$

Puisque $d(\gamma(S^1), C) \geq 2$, un carré $\Delta_{k,l}$ qui rencontre $\gamma(S^1)$ ne rencontre pas C , donc est contenu dans $\text{Int}(C)$. Soit G la réunion de tous les carrés de la forme $\Delta_{k,l}$ (avec $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$) qui rencontrent $\gamma(S^1)$. Le nombre de ces carrés étant fini (puisque $\gamma(S^1)$ est compact), G est une partie compacte de \mathbb{R}^2 , qui contient $\gamma(S^1)$ et qui est contenue dans $\text{Int}(C)$. Comme chacun des carrés $\Delta_{k,l}$ dont G est la réunion est connexe et rencontre $\gamma(S^1)$, qui est aussi connexe et contenu dans G , G est connexe. Son complémentaire $\mathbb{R}^2 - G$ est un ouvert non borné de \mathbb{R}^2 qui contient $C \cup \text{Ext}(C)$ et qui a, en raison de la compacité de G , une et une seule composante connexe non bornée, que nous notons H . Comme $C \cup \text{Ext}(C)$ est connexe et non borné, il est contenu dans la composante connexe non bornée H de $\mathbb{R}^2 - G$. Posons $F = \mathbb{R}^2 - H$. Puisque H est ouvert, contient $C \cup \text{Ext}(C)$ et ne rencontre pas G , F est fermé, contenu dans $\text{Int}(C)$, et contient G , donc aussi $\gamma(S^1)$. De plus, F est réunion d'une famille finie de carrés de la forme $\Delta_{k,l}$, avec $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$.

Deuxième étape: preuve de la connexité de F . Nous remarquons que F est la réunion de G et des composantes connexes bornées de $\mathbb{R}^2 - G$. Ces composantes connexes sont des ouverts dont l'adhérence est contenue dans F , car F est fermé. Nous pouvons donc dire aussi que F est réunion de G et des adhérences des composantes connexes bornées de $\mathbb{R}^2 - G$. Chaque composante connexe bornée de $\mathbb{R}^2 - G$ est adhérente à G . Par suite F ,

qui est réunion de G qui est connexe et des adhérences des composantes connexes bornées de $\mathbb{R}^2 - G$, qui sont connexes et rencontrent G , est connexe.

Troisième étape: étude de la frontière de F . La frontière $\text{Fr}(F)$ est réunion d'une famille finie, notée \mathcal{S} , de segments de droite de longueur 1, parallèles à un des axes de coordonnées, dont les extrémités sont des points de coordonnées entières. Ils sont de la forme

$$L_{k, k+1, l} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; k \leq x \leq k+1, y = l \}$$

ou de la forme

$$L_{k, l, l+1} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; x = k, l \leq y \leq l+1 \}.$$

Nous allons prouver que cette frontière est une courbe de Jordan et que F n'est autre que la réunion de cette courbe de Jordan et de son intérieur.

Considérons un segment de droite de longueur 1 élément de \mathcal{S} . Nous supposons qu'il est parallèle à l'axe des abscisses (le raisonnement qui suit pouvant être adapté immédiatement au cas où ce segment de droite est parallèle à l'axe des ordonnées). Soit $L_{k, k+1, l}$ ce segment. Nous allons montrer que chaque extrémité de ce segment appartient à un et un seul autre segment de droite élément de \mathcal{S} , distinct de $L_{k, k+1, l}$. Nous ferons le raisonnement pour l'extrémité (k, l) , le même raisonnement s'appliquant aussi à l'autre extrémité $(k+1, l)$.

Puisque $L_{k, k+1, l}$ est contenu dans $\text{Fr}(F)$, un et un seul des deux carrés $\Delta_{k, l}$ ou $\Delta_{k, l-1}$ qui ont en commun ce côté, est contenu dans F . Supposons, par exemple, que $\Delta_{k, l}$ soit contenu dans F et que $\Delta_{k, l-1}$ ne le soit pas (le raisonnement étant le même dans le cas contraire).

S'il n'existait aucun segment de droite élément de \mathcal{S} autre que $L_{k, k+1, l}$ ayant pour extrémité le point (k, l) , il existerait un chemin continu, ne rencontrant pas $\text{Fr}(F)$, formé par les segments de droite joignant successivement les centres des carrés $\Delta_{k, l}$, $\Delta_{k-1, l}$, $\Delta_{k-1, l-1}$ et $\Delta_{k, l-1}$. Le carré $\Delta_{k, l-1}$ serait contenu dans F , ce qui contredirait le fait que $L_{k, k+1, l}$ est une partie de la frontière de F . Voir figure 5 a.

Supposons qu'il existe deux segments de droite éléments de \mathcal{S} , autres que $L_{k, k+1, l}$, ayant pour extrémité le point (k, l) , par exemple les segments de droite $L_{k, l, l+1}$ et $L_{k-1, k, l}$. Voir figure 5 b. Le chemin continu formé par les segments de droite joignant successivement les centres des carrés $\Delta_{k, l}$, $\Delta_{k-1, l}$, $\Delta_{k-1, l-1}$ et $\Delta_{k, l-1}$ traverserait alors deux fois la frontière de F ; lors de la première traversée, il passerait de F à son

complémentaire, et lors de la seconde, de ce complémentaire à F . Le carré $\Delta_{k,l-1}$ serait contenu dans F , ce qui, comme nous l'avons vu ci-dessus, contredirait le fait que $L_{k,k+1,l}$ est une partie de la frontière de F .

Supposons qu'il existe trois segments de droite éléments de \mathcal{S} , autres que $L_{k,k+1,l}$, ayant le point (k,l) pour extrémité. Dans ce cas, les quatre segments de droite $L_{k,k+1,l}$, $L_{k-1,k,l}$, $L_{k,l-1,l}$ et $L_{k,l,l+1}$ qui ont le point (k,l) pour extrémité sont tous éléments de \mathcal{S} . Voir figure 5 c. Par suite, les carrés $\Delta_{k,l}$ et $\Delta_{k-1,l-1}$ sont contenus dans F , tandis que les carrés $\Delta_{k-1,l}$ et $\Delta_{k,l-1}$ ne le sont pas. Le point (k,l) n'est pas élément de $\gamma(S^1)$, car s'il l'était, $\gamma(S^1)$ rencontrerait les carrés $\Delta_{k-1,l}$ et $\Delta_{k,l-1}$; ceux-ci seraient alors contenus dans G , donc aussi dans F , ce qui contredirait le fait que les quatre segments de droite $L_{k,k+1,l}$, $L_{k-1,k,l}$, $L_{k,l,l+1}$ et $L_{k,l-1,l}$ font partie de la frontière de F . La distance du point (k,l) au compact $\gamma(S^1)$ étant strictement positive, il existe un réel $r > 0$ tel que le disque ouvert, noté D , de centre (k,l) et de rayon r ne rencontre pas $\gamma(S^1)$. De plus, nous pouvons imposer à r d'être strictement inférieur à 1; le disque D est alors contenu dans l'intérieur de la réunion des quatre carrés $\Delta_{k,l}$, $\Delta_{k-1,l}$, $\Delta_{k-1,l-1}$ et $\Delta_{k,l-1}$. La figure 5 c illustre la situation.

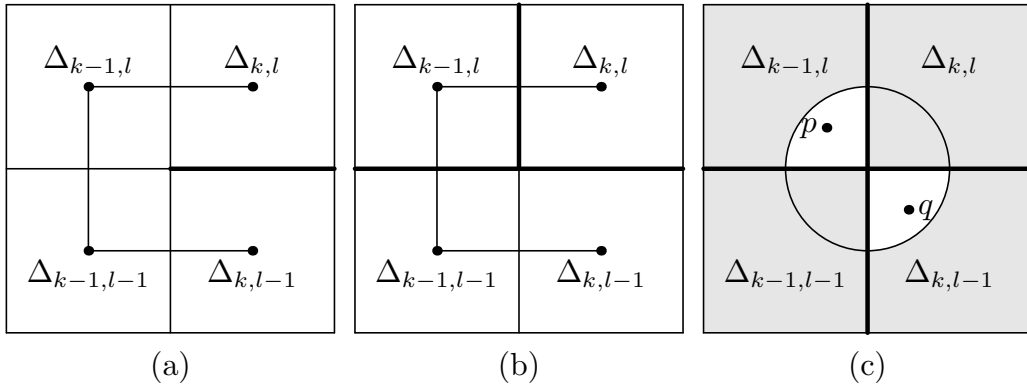


FIGURE 5

Illustration de la preuve de la proposition 2

Soient p et q deux points appartenant à l'intersection du disque D avec l'intérieur, respectivement, du carré $\Delta_{k-1,l}$ et du carré $\Delta_{k,l-1}$. Soit $A = (\mathbb{R}^2 - D) \cap (C \cup \text{Int}(C))$. Les parties A et F de \mathbb{R}^2 sont compactes. Leur réunion $A \cup F$ ne contient pas les points p et q . La partie F ne sépare pas p et q , car ces points appartiennent au complémentaire H de

F , qui est connexe. La partie A ne sépare pas non plus ces deux points, car ils sont tous deux contenus dans le disque ouvert D , qui est connexe et disjoint de A . Nous allons montrer que $A \cap F$ est connexe. Puisque F est contenu dans $\text{Int}(C)$, $A \cap F = (\mathbb{R}^2 - D) \cap F$. Le disque D ne rencontrant pas $\gamma(S^1)$, $(\mathbb{R}^2 - D) \cap G$ est connexe, car réunion de $\gamma(S^1)$, qui est connexe, et de parties connexes (qui sont soit des carrés $\Delta_{i,j}$ entiers, soit éventuellement l'intersection du carré $\Delta_{k,l}$ ou du carré $\Delta_{k-1,l-1}$ avec $\mathbb{R}^2 - D$) qui toutes rencontrent $\gamma(S^1)$. Enfin, $(\mathbb{R}^2 - D) \cap F$ est connexe car réunion de $(\mathbb{R}^2 - D) \cap G$, qui est connexe, et de parties connexes (qui, comme ci-dessus, sont soit des carrés $\Delta_{i,j}$ entiers, soit éventuellement l'intersection du carré $\Delta_{k,l}$ ou du carré $\Delta_{k-1,l-1}$ avec $\mathbb{R}^2 - D$) qui toutes rencontrent $(\mathbb{R}^2 - D) \cap G$.

Le théorème de Janiszewski montre alors que $A \cup F$ ne sépare pas p et q , ce qui est manifestement faux, puisque le compact $\Delta_{k,l} \cup \Delta_{k-1,l-1} \cup (\Delta_{k-1,l} - D) \cup (\Delta_{k,l-1} - D)$, représenté en gris sur la figure 5 c, est contenu dans $A \cup F$ et sépare les points p et q . Nous avons ainsi prouvé par l'absurde que les segments de droite $L_{k-1,k,l}$, $L_{k,l-1,l}$ et $L_{k,l,l+1}$ ne peuvent pas être tous les trois contenus dans $\text{Fr}(F)$.

Comme \mathcal{S} est une famille finie, et comme chacune des deux extrémités de chaque segment de droite élément de \mathcal{S} appartient aussi à un autre segment de droite élément de \mathcal{S} , la frontière de F , qui n'est autre que la réunion des segments de droite éléments de \mathcal{S} , est réunion d'une famille finie de courbes de Jordan deux à deux disjointes. Montrons que $\text{Fr}(F)$ est en fait une seule courbe de Jordan. Pour cela supposons que $\text{Fr}(F)$ contienne deux courbes de Jordan disjointes. Le cas où l'une de ces courbes est contenue à l'intérieur de l'autre est exclu, car la frontière de F est aussi frontière de $\mathbb{R}^2 - F = H$; la courbe intérieure ne pourrait pas faire partie de la frontière de H , qui est un ouvert non borné. Le cas où chacune de ces courbes est contenue dans l'extérieur de l'autre est lui aussi exclu, car il est incompatible avec la connexité de F .

Dernière étape: fin de la preuve. Nous avons prouvé que la frontière de F est une courbe de Jordan. Il est alors facile de voir que H n'est autre que l'extérieur de cette courbe de Jordan. En effet, H est un ouvert connexe non borné, donc est contenu dans $\text{Ext}(\text{Fr}(F))$. Tout point z de $\text{Ext}(\text{Fr}(F))$ est l'origine d'un arc de courbe continu, contenu dans $\text{Ext}(\text{Fr}(F))$, s'éloignant à l'infini. Cet arc de courbe rencontre nécessairement H . Par suite le point z , qui peut être joint à un point de H par un chemin continu ne traversant pas la frontière de F (qui est aussi

la frontière de H) est un point de H . Le complémentaire F de H est alors nécessairement réunion de la courbe de Jordan $\text{Fr}(F)$ et de son intérieur. Le lemme 4 montre que F est contractible. Le lemme 2 montre enfin que $\gamma : S^1 \rightarrow \text{Int}(C)$ est homotope à une application constante. Comme γ est une application continue quelconque de S^1 dans $\text{Int}(C)$, nous pouvons conclure que $\text{Int}(C)$ est simplement connexe. \square

RÉFÉRENCES

- [1] DIEUDONNÉ, J. *Éléments d'analyse, tome I (fondements de l'analyse moderne)*. Gauthier-Villars, Paris, 1968.
- [2] DUGUNDJI, J. *Topology*. Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1966.
- [3] HERVÉ, M. *Les fonctions analytiques*. Presses universitaires de France, Paris, 1982.

Charles-Michel Marle

Institut de Mathématiques
Université Pierre et Marie Curie
4, place Jussieu
75252 Paris cédex 05
France
e-mail: marle@math.jussieu.fr